問題 **1** 次の表は、ランダムに選ばれた６本の同一種の木について、高さ X と幹の周長 Y を測定したものです（単位メートル）。

X	8.7	6.8	7.9	7.0	7.2	6.2
Y	0.75	0.55	0.73	0.61	0.66	0.60

（１）X, Y それぞれの平均値 $E[X]$、$E[Y]$、X の分散 $Var[X]$、X, Y の共分散 $Cov[X,Y]$ を求めて下さい。ただし、分数計算が割り切れない場合は四捨五入等の近似は一切せず、分数の形で答えて下さい。

（２）Y の X への回帰直線：

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

を利用して高さが 8 メートルの木の幹の周囲を推測して下さい。ただし、小数点以下３桁目を四捨五入して小数点以下２桁で答えて下さい。

配点：３５点	シラバス達成度目標：ア、イ、オ

【解答例】　（１）

$$E[X] = \frac{8.7 + \cdots + 6.2}{6} = \frac{43.8}{6} = 7.3$$

$$E[Y] = \frac{0.75 + \cdots + 0.60}{6} = \frac{3.9}{6} = 0.65$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \frac{\begin{array}{l}(8.7-7.3)^2 + (6.8-7.3)^2 + (7.9-7.3)^2 \\ \quad + (7.0-7.3)^2 + (7.2-7.3)^2 + (6.2-7.3)^2\end{array}}{6} \\ &= \frac{1.4^2 + (-0.5)^2 + 0.6^2 + (-0.3)^2 + (-0.1)^2 + (-1.1)^2}{6} \\ &= \frac{1.96 + 0.25 + 0.36 + 0..09 + 0.01 + 1.21}{6} \\ &= \frac{3.88}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \frac{\begin{array}{l}1.4(0.75-0.65) + (-0.5)(0.55-0.65) + 0.6(0.73-0.65) \\ \quad + (-0.3)(0.61-0.65) + (-0.1)(0.66-0.65) + (-1.1)(0.60-0.65)\end{array}}{6} \\ &= \frac{1.4\cdot 0.1 + 0.5\cdot 0.1 + 0.6\cdot 0.08 + 0.3\cdot 0.04 - 0.1\cdot 0.01 + 1.1\cdot 0.05}{6} \\ &= \frac{0.14 + 0.05 + 0.048 + 0.012 - 0.001 + 0.055}{6} \\ &= \frac{0.304}{6} \end{aligned}$$

（２）題意より、求める幹の周囲 y は

$$\begin{aligned} y - 0.65 &= \frac{\frac{0.304}{6}}{\frac{3.88}{6}}(8 - 7.3) \\ y &= \frac{0.304}{3.88}0.7 + 0.65 \\ &= \frac{0.2128}{3.88} + 0.65 \\ &= 0.05484\cdots + 0.65 \\ &\sim 0.70 \end{aligned}$$

となります。

問題 **2** 密度関数が次の $h(x)$：

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - x + 3) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[0 \leq X \leq 2]$ と期待値 $E[X]$ を求めて下さい。

配点：１６点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[0 \leq X \leq 2] &= \int_0^2 h(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) \\ &= \frac{7}{16} \\ &= 0.4375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x)dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 2(x^4 - x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{15} \quad (\sim -0.06667) \end{aligned}$$

問題 **3** 標準正規分布表を使って次の問いに答えて下さい。

（１）$N(8.9, 2.5^2)$ に従う確率変数 W に対して、$P[W \leq z] = 0.67$ となるような z を求めて下さい。

（２）$N(31, 5.2^2)$ に従う確率変数 Z に対して $P[26 \leq Z \leq 40]$ を求めて下さい。

配点：（１）６点、（２）１０点	シラバス達成度目標：エ

【解答例】　（１）

$$\begin{aligned} 0.67 &= P[W \leq z] = P\left[\frac{W - 8.9}{2.5} \leq \frac{z - 8.9}{2.5}\right] = P\left[N(0,1) \leq \frac{z - 8.9}{2.5}\right] \\ 0.17 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{z - 8.9}{2.5}\right] \end{aligned}$$

であるので、標準正規分布表から

$$\begin{aligned} \frac{z - 8.9}{2.5} &\sim 0.44 \\ z &\sim 0.44 \cdot 2.5 + 8.9 = 10.0 \end{aligned}$$

が分かります。

（２）

$$\begin{aligned} P[26 \leq Z \leq 40] &= P\left[\frac{26 - 31}{5.2} \leq \frac{Z - 31}{5.2} \leq \frac{40 - 31}{5.2}\right] \\ &= P\left[-\frac{5}{5.2} \leq N(0,1) \leq \frac{9}{5.2}\right] \\ &\sim P[0 \leq N(0,1) \leq 0.96] + P[0 \leq N(0,1) \leq 1.73] \\ &\sim 0.3315 + 0.4582 \\ &\sim 0.7897 \end{aligned}$$

問題 **4** 次の２つの関数のたたみ込み $(f*g)(x)$ を計算して下さい：

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & -1\le x\le 2\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

配点：１０点	シラバス達成度目標：イ、オ

【解答例】　たたみ込みの定義式に於いて、まず被積分関数の第２因子を具体化すると

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy\\&=\int_{-1}^{2}f(x-y)\frac{1}{3}dy\end{aligned}$$

となります。次に第１因子を具体化しますが、$f(x-y)$ は $0\le x-y\le 1$、つまり $x-1\le y\le x$ に於いてのみ０でないのでこの区間 $[x-1,x]$ と積分区間の $[-1,2]$ の重なり具合が問題になります。

従ってたたみ込みは場合分けによって

$$(f*g)(x)=\begin{cases}0 & 3\le x\\ \int_{x-1}^{2}\frac{1}{3}dy & 2\le x\le 3\\ \int_{x-1}^{x}\frac{1}{3}dy & 0\le x\le 2\\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{3}dy & -1\le x\le 0\\ 0 & x\le -1\end{cases}=\begin{cases}0 & 3\le x\\ \frac{1}{3}(3-x) & 2\le x\le 3\\ \frac{1}{3} & 0\le x\le 2\\ \frac{1}{3}(x+1) & -1\le x\le 0\\ 0 & x\le -1\end{cases}$$

となります。

問題 **5** 多次元の確率変数について述べた以下の文章が正しいかどうか○/×のみで答えて下さい。

（１）確率変数 X,Y は独立であって、X の密度関数は $f(x)$、Y の密度関数は $g(y)$ であるとします。
このとき和 $X+Y$ の密度関数は $f(x)g(y)$ です。

（２）２次元の確率変数 (X,Y) があり、各成分確率変数 X,Y はどちらも期待値をもつものとします。
このとき確率変数 $2X-3Y+1$ の期待値は $2E[X]-3E[Y]+1$ です。

（３）２次元の確率変数 (X,Y) の密度関数が $h(x,y)$ であるとき、X の密度関数は $\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)dy$ です。

配点：各５点	シラバス達成度目標：オ

【解答例】　（１）×（２）○（３）○

問題 **6** 非負値連続関数 $h(x)$ が確率変数 X の密度関数であるとはどう云う事か説明して下さい。

配点：８点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】　任意の区間 $[a,b]$ に対して

$$P[X \in [a,b]] = \int_a^b h(x)dx$$

が成り立つと云う事。