

問題 1 新しく開発した制がん剤をがんになっている 10 匹のモルモットに投与し、体重（第 1 成分、単位 mg）と生存日数（第 2 成分、単位日）の統計をとったところ次の様になりました：

(520,42),(370,20),(740,54),(580,30),(920,68),
(420,34),(820,55),(680,40),(550,40),(500,17)

第 1 成分（体重）データを X 、第 2 成分（生存日数）データを Y として以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値・分散を計算して下さい（近似はしないこと）。
- (2) $Var[X]Var[Y]$ と 2525^2 をそれぞれ求め、大体等しいことを確認して下さい（そうでない場合は計算が間違っていると云う事です）。
- (3) X, Y の共分散を求め（近似はしないこと）、更に（2）の近似を使って相関係数を求めて下さい。
- (4) Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、体重が 1310mg の場合の生存日数を推定して下さい。

配点：(1)・(2) 30 点、(3)・(4) 10 点 シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{520 + \cdots + 500}{10} = \frac{6100}{10} = 610$$

$$E[Y] = \frac{42 + \cdots + 17}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

それぞれ 10 点

それぞれについて

- 計算ミスのみ - 3 点
- ミスが多い、又は重大なミス - 5 点

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \frac{(520 - 610)^2 + \cdots + (500 - 610)^2}{10} \\ &= \frac{90^2 + 240^2 + 130^2 + 30^2 + 310^2 + 190^2 + 210^2 + 70^2 + 60^2 + 110^2}{10} \\ &= \frac{8100 + 57600 + 16900 + 900 + 96100 + 36100 + 44100 + 4900 + 3600 + 12100}{10} \\ &= \frac{280400}{10} \\ &= 28040 \end{aligned}$$

5 点

- 少しの計算ミス - 2 点
- 重大なミス - 4 点

$$\begin{aligned} Var[Y] &= E[(Y - E[Y])^2] \\ &= \frac{2^2 + 20^2 + 14^2 + 10^2 + 28^2 + 6^2 + 15^2 + 0^2 + 0^2 + 23^2}{10} \\ &= \frac{4 + 400 + 196 + 100 + 784 + 36 + 225 + 529}{10} \\ &= \frac{2274}{10} \\ &= 227.4 \end{aligned}$$

5 点

- 少しの計算ミス - 2 点
- 重大なミス - 4 点

(2)

$$28040 \times 227.4 = 6376296$$

ですが、

$$2524^2 = 6370576, \quad 2525^2 = 6375625, \quad 2526^2 = 6380676$$

によれば、整数の自乗としては 2525^2 が最も近い値になっている事が分かります。

確認のみなので採点対象外

(3)

$$\begin{aligned}
 Cov[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\
 &= \frac{(520 - 610)(42 - 40) + \cdots + (500 - 610)(17 - 40)}{10} \\
 &= \frac{(-90)2 + (-240)(-20) + 130 \cdot 14 + (-30)(-10) + 310 \cdot 28}{10} \\
 &\quad + \frac{(-190)(-6) + 210 \cdot 15 + 70 \cdot 0 + (-60)0 + (-110)(-23)}{10} \\
 &= \frac{-180 + 4800 + 1820 + 300 + 8680 + 1140 + 3150 + 2530}{10} \\
 &= 2224
 \end{aligned}$$

4 点

- 少しの計算ミス 3 点
- より大きなミス 1 点

$$Cor[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = \frac{2224}{2525} \sim 0.881$$

2 点

- ミスのあるものは 1 点

(4) 回帰直線は

$$y - 40 = \frac{2224}{28040}(x - 610)$$

ですから、体重が 1310mg の時の生存日数の推定値は

$$y = \frac{2224}{28040}700 + 40 = \frac{1556800}{28040} + 40 \sim 95.52$$

となります。

4 点

- 計算が形式的に合っていれば 3 点
- 少しの計算ミス - 1 点
- 最後の答えを算出していないもの - 1 点

問題 2 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 A について期待値 $E[A]$ と確率 $P[-1 \leq A \leq 1]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：15 点

シラバス達成度目標：ウ

ここで既に間違っているもの 2 点

【解答例】

$$\begin{aligned}
 E[A] &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx \\
 &= \int_0^2 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) dx \\
 &= \left[-\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \right]_0^2 \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

ここで既に間違っているもの 2 点

$$\begin{aligned}
 P[-1 \leq A \leq 1] &= \int_{-1}^1 h(x)dx \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \right) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

7 点

- 少しの計算ミスのみ - 2 点
- より大きなミス - 4 点

問題 3 正規分布 $N(6, 16)$ に従う確率変数 X について確率

$$P[0.2 \leq X \leq 17.4]$$

を標準正規分布表を使って求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[0.2 \leq X \leq 17.4] &= P\left[\frac{0.2 - 6}{4} \leq N(0, 1) \leq \frac{17.4 - 6}{4}\right] \\ &= P\left[-\frac{5.8}{4} \leq N(0, 1) \leq \frac{11.4}{4}\right] \\ &= P[-1.45 \leq N(0, 1) \leq 2.85] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.45] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 2.85] \\ &\sim 0.4265 + 0.4978 \\ &= 0.9243 \end{aligned}$$

- 少しの計算ミスのみ 8 点
- より大きなミスのあるもの 6 点

計算の仕方がそもそも上手く行っていないもの、混乱しているもの 3 点

問題 4 次の 2 つの関数のたたみ込みを計算して下さい：

$$v(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad w(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

配点：15 点 シラバス達成度目標：オ

【解答例】 まず

最初の積分の計算あたり
までのみのもの 5 点

$$\begin{aligned} (v * w)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)w(y)dy \\ &= \int_0^2 v(x-y)\frac{1}{2}dy \end{aligned}$$

ですが、この被積分関数が 0 でない範囲は $0 \leq x-y \leq 1$ 、すなわち $x-1 \leq y \leq x$ ですから積分範囲内とこの範囲の重なり具合によって積分値が変わってきます。そこで x の値によって場合分けして考えましょう。

【 $x \leq 0$ の場合】 この場合 2 つの区間は重なりませんから積分値は 0 です。

【 $0 \leq x \leq 1$ の場合】 この場合、積分区間の中の区間 $[0, x]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから、積分値は

$$(v * w)(x) = \int_0^x \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}x$$

となります。

【 $1 \leq x \leq 2$ の場合】 この場合、積分区間内の区間 $[x-1, x]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから、

$$(v * w)(x) = \int_{x-1}^x \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}$$

です。

【 $2 \leq x \leq 3$ の場合】 この場合は積分区間内の区間 $[x-1, 2]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから

$$(v * w)(x) = \int_{x-1}^2 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(-x + 3)$$

【 $3 \leq x$ の場合】 この場合も2つの区間は重なりませんから積分値は0です。

以上からたたみ込みの結果は

$$(v * w)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(-x + 3) & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & 3 \leq x \end{cases}$$

となります。

- 少しの計算ミス - 2 点
- より大きなミス - 5 点

問題 5 次の3つの文章が正しいか間違っているかを○／×で答えて下さい。

(1) X, Y の密度関数がそれぞれ $f(x), g(y)$ であるとき、2次元の確率変数 (X, Y) の密度関数は $f(x)g(y)$ である。

(2) 2次元の確率変数 (X, Y) の成分確率変数 X, Y に対して

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

が成り立つ。

(3) 独立な確率変数 X, Y に対して

$$Var[2X - 3Y] = 4Var[X] - 9Var[Y]$$

が成り立つ。

配点：各5点 | シラバス達成度目標：イ、オ

【解答例】 (1) ×、(2) ×、(3) ×

完全回答で採点

問題 6 中心極限定理とはどう云う内容の定理ですか。

配点：5 点 シラバス達成度目標：オ、カ

【解答例】 平均 m 、分散 v の母集団からとった大きさ $n \geq 50$ の標本平均は正規分布 $N\left(m, \frac{v}{n}\right)$ で近似されます。

- 標本サイズが大きいとき正規分布である
と言えていれば 2 点～4 点
- 標本サイズに言及がなかったり、正規分
布に言及がないもの 1 点