

問題 1 平均値が m 、分散が $t > 0$ である確率変数 A があり、 $B = -2A + 3$ とします。

- (1) $E[B]$ を求めて下さい。
- (2) $Var[B]$ を求めて下さい。
- (3) 相関係数 $Cor[A, B]$ を求めて下さい。

ただし、相関係数とは共分散を標準偏差の積で割った値とします：

$$Cor[A, B] = \frac{Cov[A, B]}{\sqrt{Var[A]}\sqrt{Var[B]}}.$$

配点：各 5 点 シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$E[B] = E[-2A + 3] = -2E[A] + 3 = -2m + 3.$$

(2)

$$Var[B] = Var[-2A + 3] = 4Var[A] = 4t.$$

(3) まず共分散を求めます。

$$\begin{aligned} Cov[A, B] &= E[(A - m)(B + 2m - 3)] \\ &= E[(A - m)(-2A + 2m)] \\ &= -2E[(A - m)^2] \\ &= -2Var[A] \\ &= -2t \end{aligned}$$

従って相関係数は

$$Cor[A, B] = \frac{-2t}{\sqrt{t}\sqrt{4t}} = -1$$

となります。

それぞれにつき以下の通り：

- 軽いケアレスミス - 1 点
- 計算ミス - 2 点
- 定義の間違いなど重大なミス - 3 点
- 少しの変形のみ - 4 点

問題 2 2 次元の確率変数 (X, Y) の密度関数が 2 変数関数 $h(x, y)$ であるとはどう云う事か『累次積分』もしくは『体積』を使って述べて下さい。ただし『なぜそうなるのか』は説明する必要はありません。

配点：10 点 シラバス達成度目標：オ

【解答例】 任意の領域 D に対して

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D h(x, y) dx dy$$

が成り立つと云う事。

- 概ね良いが少し不備のあるもの 8 点
- 確率の部分、床の部分、高さの部分、2 つ以上で不備が見られるもの 6 点
- 体積に言及しているが不備の多いもの 3 点

問題 3 確率変数 X の密度関数が関数 $w(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ であるとき、確率 $P[1 \leq X]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[1 \leq X] &= \int_1^\infty \frac{1}{2}e^{-|x|} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} [-e^{-x}]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

- 符号のミスだけなど、ケアレスミス - 2 点
- 少しの計算ミス - 3 点
- 積分範囲や積分の仕方など重大なミス - 5 点
- 少しの計算のみ - 7 点

問題 4 X が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、裏面の標準正規分布表を使って確率 $P[3 \leq X \leq 10]$ を求めて下さい。

配点：15 点 | シラバス達成度目標：ウ、エ

【解答例】

$$P[3 \leq X \leq 10]$$

$$= P\left[\frac{3-5}{2} \leq \frac{X-5}{2} \leq \frac{10-5}{2}\right]$$

$$= P[-1 \leq N(0, 1) \leq 2.5]$$

$$= P[0 \leq N(0, 1) \leq 1] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 2.5]$$

$$\sim 0.3413 + 0.4938$$

$$\sim 0.8351.$$

●ここで4で割るなど
重大なミス - 5 点

●ここまでのみ 8 点

●計算ミス - 3 点

●正規分布表からの読み取りのミス - 2 点

問題 5 次の各文章が正しいか間違っているかを○/×のみで答えて下さい。

(1) 平均値が m 、分散が $v > 0$ である母集団からとった大きさ 3 の標本分散の平均値は $\frac{2}{3}v$ である。

(2) 平均値が m 、分散が $v > 0$ である母集団からとった大きさ n の標本平均の平均値は $\frac{m}{n}$ である。

配点：各 5 点 | シラバス達成度目標：カ、キ

【解答例】 (1) ○ (2) ×

●それぞれ完全解答のみ

問題 6 あるメーカーが製造販売しているヨーグルトは 1 個の内容量が 80 グラムと表示されていますが、実際にあるスーパーマーケットで販売されている 5 個を無作為に選んで内容量を調べたところ、79、80、81、81、81(単位:グラム)でした。生産された全てのヨーグルトの内容量の全体（これを母集団とします）は正規分布に従っているものと仮定して以下の問いに答えて下さい。

(1) この 5 個のサンプルの内容量の平均値と分散を求めて下さい。

(2) 問題の母集団からとった大きさ 5 の標本平均を $\bar{X}$ 、標本分散を $\bar{V}$ とし、さらに母平均を m とするとき、確率変数 $T = \frac{\bar{X}-m}{\sqrt{\frac{\bar{V}}{4}}}$ はいわゆる t -分布に従う事が知られていますが、その自由度は幾つでしょうか。

(3) 裏面の t -分布表を使って

$$P[|T| \leq d] = 0.99$$

となるような正数 d を求めて下さい。

(4) 以上の結果から母平均の信頼度 0.99 の信頼区間を求めて下さい。

配点： (1) 10 点、(2) 5 点、(3)・(4) 10 点

シラバス達成度目標： ア、カ、キ、ク

【解答例】 (1)

$$(\text{平均値}) = \frac{79 + 80 + 81 + 81 + 81}{5} = \frac{402}{5} = 80.4.$$

$$\begin{aligned} (\text{分散}) &= \frac{(79 - 80.4)^2 + (80 - 80.4)^2 + 3(81 - 80.4)^2}{5} \\ &= \frac{1.4^2 + 0.4^2 + 3 \cdot 0.6^2}{5} \\ &= \frac{1.96 + 0.16 + 1.08}{5} \\ &= \frac{3.2}{5} \\ &= 0.64. \end{aligned}$$

それぞれにつき以下の通り：

- ケアレスミス - 1 点
- 計算ミス - 2 点
- 定義のミスなど重大なミス - 3 点

(2) 自由度 4。

● 完全解答のみ

(3)・(4)

$$0.99 = P[|T| \leq d]$$

$$0.01 = P[|T| \geq d]$$

であって T が自由度 4 の t -分布に従うので、分布表から $d \sim 4.6041$ が分かります。従って信頼度 0.99 で不等式：

$$\left| \frac{80.4 - m}{\sqrt{\frac{0.64}{4}}} \right| \leq 4.6041$$

が成り立ちます。これを整理すれば

$$|80.4 - m| \leq 4.6041 \cdot 0.4$$

$$|80.4 - m| \leq 1.841640$$

$$78.558360 \leq m \leq 82.241640$$

ですから求める信頼区間は $[78.56, 82.24]$ となります。

- 少しの計算ミス、(1) - (2) でのミスによる間違いのみなど - 2 点
- 重大なミスのあるもの - 5 点
- 少しの計算のみ 3 点

問題 7 ある工場で生産しているスチールパイプの直径の平均値が 20.0mm であると言えるかどうか、大きさ 100 のサンプル調査によって有意水準 5% で検定する事にしました。そこで実際に 100 個取り出して直径を測定したところ、平均値が 20.2mm、分散が 0.45^2mm でした。

(1) 帰無仮説 H_0 :『母平均は 20.0mm である』が正しいと仮定して棄却域を求めて下さい。

(2) 帰無仮説が棄却されるかどうか調べて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：エ、ケ

【解答例】 (1) 帰無仮説 H_0 が正しい、即ち母平均は 20.0 であると仮定します。

今回のサンプルはサイズが大きいので、不明な母分散はこのサンプルの分散 0.45^2 で代用します。また、中心極限定理を適用する事が出来るので、この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(20, \frac{0.45^2}{100}\right)$ で近似されます。

そこです

$$0.05 = P[|\bar{X} - 20| \geq d]$$

となるような正数 d を求めます。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 20| \geq d]$$

$$0.95 = P[|\bar{X} - 20| \leq d]$$

$$\sim P\left[\left|N\left(0, \frac{0.45^2}{100}\right)\right| \leq d\right]$$

$$\sim P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{0.45}{10}}\right]$$

$$\sim 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.045}\right]$$

$$0.475 \sim P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.045}\right]$$

ですから、標準正規分布表から $\frac{d}{0.045} \sim 1.96$ 、従って $d \sim 0.0882$ が分かります。

従って求める両側棄却域は $(-\infty, 20 - 0.0882] \cup [20 + 0.0882, \infty)$ 即ち、 $(-\infty, 19.9118] \cup [20.0882, \infty)$ です。

(2) 今回のサンプル平均 20.2 はこの棄却域に入っています。従って帰無仮説は棄却され、スチールパイプの直径の平均値は 20.0mm ではないと考えられます。

- 片側でやっているもの、
検定の判断の仕方の間違いなど
重大なミスのあるもの - 5 点
- 計算ミス - 3 点
- 少しの計算のみのもの 5 点