

問題 1 ある化学反応工程で温度 X （度）に対する収量 Y （グラム）は次の表の通りでした：

X	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Y	48	54	59	63	68	73	78	82	84

（1） X, Y それぞれの平均値 $E[X], E[Y]$ 、 X の分散 $Var[X]$ 、 X, Y の共分散 $Cov[X, Y]$ を求めて下さい。ただし、分数計算が割り切れない場合は四捨五入等の近似は一切せず、分数の形で答えて下さい。

（2） Y の X への回帰直線：

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

を使って 95 度のときの収量を求めて下さい。

（2）回帰直線は

$$y - \frac{203}{3} = \frac{920}{2000}(x - 90)$$

ですから、 x に 95 を代入すると

$$y = \frac{92}{200} \cdot 5 + \frac{203}{3} = \frac{2099}{30} \sim 69.97$$

が得られます。

計算ミス - 2 点

（1）の間違いの影響のみのミス - 1 点

配点：（1）2 6 点、（2）4 点 シラバス達成度目標：ア、イ

●平均値はそれぞれ 8 点

計算ミス - 3 点
定義間違いなど重大なミス - 5 点

【解答例】 （1）

$$E[X] = \frac{50 + \cdots + 130}{9} = 90$$

$$E[Y] = \frac{45 + \cdots + 84}{9} = \frac{609}{9} = \frac{203}{3}$$

$$Var[X] = E[(X - 90)^2]$$

$$= \frac{2(40^2 + 30^2 + 20^2 + 10^2)}{9} = \frac{6000}{9} = \frac{2000}{3}$$

$$Cov[X, Y] = E[XY] - 90 \cdot \frac{609}{9}$$

$$= \frac{50 \cdot 48 + \cdots + 130 \cdot 84}{9} - 6090$$

$$= \frac{57570}{9} - 6090$$

$$= \frac{2760}{9}$$

$$= \frac{920}{3}$$

●分散、共分散はそれぞれ 5 点

計算ミス - 2 点
重大なミス - 3 点

問題 2 密度関数が次の $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[0 \leq X \leq 2]$ と期待値 $E[X]$ を求めて下さい。

配点：20点 シラバス達成度目標：ウ

【解答例】

$$P[0 \leq X \leq 2] = \int_0^2 h(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}x(1-x^2)dx = 0$$

●具体的な積分にしたときの
積分範囲の間違いなどの重
大なミス

- 5点

●計算ミス

- 2点

●この考慮のないものなど
重大なミス

- 5点

問題 3 $N(10, 5^2)$ に従う確率変数 W に対して標準正規分布表を使って次の問いに
答えて下さい。

(1) $P[W \leq a] = 0.1314$ となるような a を求めて下さい。

(2) $P[5.5 \leq W \leq 8.5]$ を求めて下さい。

配点：各10点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】 (1)

$$0.1314 = P[W \leq a] = P\left[\frac{W-10}{5} \leq \frac{a-10}{5}\right] = P\left[N(0,1) \leq \frac{a-10}{5}\right]$$

ですから $\frac{a-10}{5} < 0$ である事が分かり、従って

$$P\left[0 \leq N(0,1) \leq -\frac{a-10}{5}\right] = 0.5 - 0.1314 = 0.3686$$

が分かります。標準正規分布表によれば

$$-\frac{a-10}{5} = 1.12$$

●このマイナスのミス
- 5点

であって、従って

$$a = 10 - 5 \cdot 1.12 = 4.4$$

です。

●単純な計算ミス - 3点

●手続き上の重大なミス - 5点

(2)

$$P[5.5 \leq W \leq 8.5] = P\left[\frac{5.5-10}{5} \leq N(0,1) \leq \frac{8.5-10}{5}\right]$$

$$= P[-0.9 \leq N(0,1) \leq -0.3]$$

$$= P[0 \leq N(0,1) \leq 0.9] - P[0 \leq N(0,1) \leq 0.3]$$

$$= 0.3159 - 0.1179$$

$$= 0.198$$

●このマイナス
のミス
- 4点

●計算過程の記述不十分

- 2点

問題 4 次の2つの関数のたたみ込み $(f * g)(x)$ を計算して下さい：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

配点：10点

シラバス達成度目標：イ、オ

●定義の部分でのミス - 5点

【解答例】

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_0^{\infty} f(x-y)e^{-y}dy$$

ですから、被積分関数の因子 $f(x-y)$ が0でない範囲 $0 \leq x-y \leq 1$ 、すなわち $x-1 \leq y \leq x$ と積分範囲 $0 \leq y < \infty$ との重なり具合によって場合分けが生じます。

【 $x \leq 0$ の場合】 この場合積分範囲と $[x-1, x]$ は重ならず、 $(f * g)(x) = 0$ です。

【 $0 \leq x \leq 1$ の場合】 この場合範囲の重なりは $[0, x]$ ですから

$$(f * g)(x) = \int_0^x e^{-y}dy = [-e^{-y}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

【 $1 \leq x$ の場合】 この場合、範囲の重なりは $[x-1, x]$ ですから

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^x e^{-y}dy = [-e^{-y}]_{x-1}^x = e^{1-x} - e^{-x} = (e-1)e^{-x}.$$

以上から

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & 0 \leq x \leq 1 \\ (e-1)e^{-x} & 1 \leq x \end{cases}$$

となります。

●単純な計算ミス - 3点
●計算ミスが多いもの - 5点
●場合分けのミスなど
重大なミス - 5点

問題 5 多次元の確率変数について述べた以下の文章が正しいかどうか○/×のみで答えて下さい。

(1) 確率変数 X, Y は独立であって、 X の密度関数は $f(x)$ 、 Y の密度関数は $g(y)$ であるとします。

このとき和 $X + Y$ の密度関数はたたみ込み $(f * g)(x)$ になります。

(2) 2次元の確率変数 (X, Y) があり、成分確率変数 X, Y は独立であってどちらも期待値・分散をもつものとします。

このとき確率変数 $2X - 3Y + 1$ の分散は $4Var[X] + 9Var[Y]$ です。

(3) 2次元の確率変数 (X, Y) の密度関数が分かっているとき、 X, Y の相互関係に関わらず X, Y それぞれの密度関数は決定します。

配点：各5点

シラバス達成度目標：オ

【解答例】 (1) ○、(2) ○、(3) ○。

●部分点なし

問題 6 非負値連続関数 $h(x, y)$ が 2 次元の確率変数 $\mathbb{X} = (X, Y)$ の密度関数であるとはどう云う事が説明して下さい。『2 重積分』を使わずに『体積』で説明しても構いません。

配点：5 点 シラバス達成度目標：オ

【解答例】

2 変数非負値関数 $h(x, y)$ が 2 次元の確率変数 $\mathbb{X}$ の密度関数であるとは、任意の領域 D に対して

$$P[\mathbb{X} \in D] = \iint_D h(x, y) dx dy$$

次が成り立つと云う事です。

- 左辺（確率）と右辺（積分、体積）
のどちらかが登場していないもの 2 点
- 記述の不十分なもの 3 ~ 4 点