

問題 1 ある工場で機械 A を用いて作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 100 個無作為に抽出して有意水準 5 % で仮説検定を行う事になりました。

そこで実際に 100 個のサンプルで調べたところ平均重量が 5.73g、標準偏差が 0.22g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また、標本数が大きいのでその標準偏差は 0.22g であると仮定し、

帰無仮説 H_0 : 『B で作られた製品の平均重量は 5.68g である』

対立仮説 H_1 : 『B で作られた製品の平均重量は 5.68g ではない』

として棄却域を求め、平均重量は変化したと言って良いかどうか仮説検定して下さい。

配点：15 点	シラバス達成度目標：エ、ケ
---------	---------------

【解答例】 仮説 H_0 を仮定します。すると問題に書かれている仮定から、B で作られた製品全体の中から取った大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(5.68, \frac{0.22^2}{100}\right)$ に従います。

問題は平均重量に変化があったかどうかですから両側検定として有意水準 5 % の棄却域を取ります。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めれば良いわけですが、標準化して

$$\begin{aligned} &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.22^2}{100}\right)\right| \geq d\right] \\ &= P\left[\left|N(0, 1)\right| \geq \frac{d}{\frac{0.22}{\sqrt{100}}}\right] \\ &= 1 - 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.22}{10}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.022}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{0.022} \sim 1.96$ 、つまり、 $d \sim 0.043$ が分かります。

これは

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq 0.043]$$

を意味し、棄却域は

$$(-\infty, 5.637] \cup [5.723, \infty)$$

となります。今回のサンプルの平均値 5.73 はこの棄却域に入っていますので仮説 H_0 は棄却され、平均重量は変化したと言えることが分かります。□

問題 2 区間 $[0, 2]$ 上の一様分布に従う確率変数 A に対して、その密度関数と分散を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：ウ

【解答例】 密度関数は

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であり、平均値は明らかに 1 です。従って分散は

$$\begin{aligned} \text{Var}[A] &= E[(A - 1)^2] \\ &= \int_0^2 (x - 1)^2 \frac{1}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{6} (x - 1)^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

です。

□

問題 3 2 項分布 $B(4, \frac{1}{2})$ に従う確率変数 B に対して、確率： $P[B = 3]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】

$$P[B = 3] = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$$

□

問題 4 次の各文章が正しいかどうか、○×のみで答えて下さい。

(1) 平均・分散の存在する母集団に対して、大きさ 50 の標本分散の平均値は母分散の $\frac{50}{49}$ 倍である。

(2) 平均・分散の存在する母集団に対して、不偏分散の平均値は母分散である。

(3) 確率変数 F, G が独立であって、それぞれの密度関数が $f(x), g(x)$ であるとき、 (F, G) の密度関数は $f(x)g(y)$ である。

(4) 確率変数 A, B が独立で共に分散が存在するとき、共分散 $Cov[A, B]$ は A, B それぞれの分散の積となる。

(5) 2次元の有限データ (V, W) の相関係数 $Cor[V, W]$ は、存在するのならば必ず不等式 $0 \leq Cor[V, W] \leq 1$ を満たす。

配点：各 5 点 | シラバス達成度目標：イ、オ、キ

【解答例】 (1) ×

母平均を m 、母分散を v とすれば、大きさ 50 の標本分散 $\bar{V}$ の平均値は

$$\begin{aligned} E[\bar{V}] &= E\left[\frac{1}{50} \sum_{j=1}^{50} (X_j - m - \bar{X} + m)^2\right] \\ &= \frac{1}{50} \sum_{j=1}^{50} \{E[(X_j - m)^2] - 2E[(X_j - m)(\bar{X} - m)] + E[(\bar{X} - m)^2]\} \\ &= \frac{1}{50} \sum_{j=1}^{50} v - 2E\left[\frac{1}{50} \sum_{j=1}^{50} (X_j - m)(\bar{X} - m)\right] + Var[\bar{X}] \\ &= v - 2Var[\bar{X}] + Var[\bar{X}] \\ &= v - \frac{v}{50} \\ &= \frac{49}{50}v \end{aligned}$$

(2) ○

(3) ○

(4) ×

A, B が独立であれば $A - E[A]$ と $B - E[B]$ も独立なので

$$Cov[A, B] = E[(A - E[A])(B - E[B])] = E[A - E[A]]E[B - E[B]] = 0$$

となります。

(5) ×

例えば $Var[A] \neq 0$ であれば

$$Cov[A, -A] = E[(A - E[A])(-A - E[-A])] = -E[(A - E[A])^2] = -Var[A] < 0$$

となります。

□

問題 5 ある食品に含まれるビタミンの量を調べるため、大きさ 17 のサンプルを抽出し 100g 中に含まれるビタミンの量（単位 mg）を測って次の値を得ました：

16	22	21	20	23	21	19	15	13	23
17	20	29	18	22	16	25			

（1）このサンプルの平均値と分散を求めて下さい。

（2）次の事実：

平均 m の正規母集団からとった大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 $\bar{V}$ に対して、確率変数

$$\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\bar{V}}{n-1}}}$$

は自由度 $n - 1$ の t -分布に従います。

を使って、ビタミンの含有量が正規分布に従うときビタミン含有量の母平均を信頼度 95 % で推定して下さい。

配点：（1）20 点、（2）5 点 シラバス達成度目標：ア、エ、ク

【解答例】 （1）

$$(\text{平均値}) = \frac{16 + 22 + 21 + \cdots + 25}{17} = \frac{340}{17} = 20$$

$$(\text{分散}) = \frac{(16 - 20)^2 + (22 - 20)^2 + (21 - 20)^2 + \cdots + (25 - 20)^2}{17} = \frac{254}{17} \sim 14.94.$$

（2）母集団の平均を m 、大きさ 17 の標本平均・標本分散を $\bar{X}, \bar{V}$ とすれば、 $\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\bar{V}}{16}}}$ は自由度 16 の t -分布に従いますから、 t -分布表から

$$P \left[\left| \frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{\bar{V}}{16}}} \right| \geq 2.1199 \right] \sim 0.05$$

となっている事が分かり、従って今回のサンプル結果に関して、信頼度 95 % で

$$\begin{aligned} \left| \frac{20 - m}{\sqrt{\frac{254}{17}}} \right| &\leq 2.1199 \\ 20 - \frac{\sqrt{14.94} \cdot 2.1199}{4} &\leq m \leq 20 + \frac{\sqrt{14.94} \cdot 2.1199}{4} \\ 20 - \frac{3.87 \cdot 2.1199}{4} &\leq m \leq 20 + \frac{3.87 \cdot 2.1199}{4} \\ 20 - 2.05 &\leq m \leq 20 + 2.05 \\ 17.95 &\leq m \leq 22.05 \end{aligned}$$

である事になり、これが求める信頼区間です。

ただし $\sqrt{14.94}$ は、大体 $\sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \sim 1.73 \cdot 2.24 \sim 3.875$ であり、実際に 3.87^2 、 3.86^2 を計算してみると

$$3.87^2 = 14.9769, \quad 3.86^2 = 14.8996$$

なので $\sqrt{14.94} \sim 3.87$ として計算しています。

□

問題 6 ある母集団の分散が 3.87^2 である事が分かっています。この母集団の平均値を m とするとき、この母集団からとった大きさ 50 の標本平均 $\bar{X}$ に対して、

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めて下さい。

配点：10点	シラバス達成度目標：エ、カ
--------	---------------

【解答例】標本のサイズが大きいのので中心極限定理が適用出来、 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3.87^2}{50}\right)$ で近似されます。従って

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

を少し変形すれば

$$0.95 = P\left[\left|\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}}\right| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}}\right] \sim P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}}\right]$$

となりますが、標準正規分布表に依れば、 $P[|N(0, 1)| \leq 1.96] \sim 0.95$ ですから、

$$\frac{d}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}} = 1.96, \quad d = \frac{1.96 \times 3.87}{5\sqrt{2}} \sim 1.07$$

であれば良い事が分かります。

□