

1 次の2次元のデータ (A, B) について以下の問いに答えて下さい。

A	3	2	7	1	1	2	1	6	3	0	7	3
B	5	8	6	5	8	8	7	11	7	4	7	8

(1) 平均値 $E[A]$, $E[B]$ と分散 $Var[A]$ を求めて下さい。

(2) B の A への回帰直線の方程式が

$$y - E[B] = \frac{Cov[A, B]}{Var[A]}(x - E[A])$$

となることを使って A が5である時の B の値を概算して下さい。

配点：(1) 25点 (2) 5点 シラバス達成度目標：ア、イ、オ

【解答例】 (1)

$$E[A] = \frac{3+2+7+1+1+2+1+6+3+0+7+3}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

$$E[B] = \frac{5+8+6+5+8+8+7+11+7+4+7+8}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

$Var[A]$

$$= \frac{0^2 + (-1)^2 + 4^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 3^2 + 0^2 + (-3)^2 + 4^2 + 0^2}{12}$$

$$= \frac{1+16+4+4+1+4+9+9+16}{12}$$

$$= \frac{64}{12}$$

$$= \frac{16}{3}$$

$$\sim 5.33$$

分散5点

計算ミス - 2点

各10点

計算ミス - 4点

(2) 共分散を計算しておきます。

$$\begin{aligned} Cov[A, B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\ &= \frac{15+16+42+5+8+16+7+66+21+0+49+24}{12} - 21 \\ &= \frac{269}{12} - 21 \\ &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

すると題意より回帰直線の方程式は

$$y - 7 = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{64}{12}}(x - 3)$$

計算ミス - 3点

となりますから、 $x = 5$ のとき

$$y = \frac{17}{64} \cdot 2 + 7 \sim 7.53$$

を得ます。以上から得点が5点の時の安打数は概算で7.5本と考えられます。

□

2 非負値連続関数 $h(x)$ が確率変数 X の密度関数であるとはどう云う事が説明して下さい。

配点：10点 シラバス達成度目標：ウ

【解答例】 任意の区間 $[a, b]$ に対して、確率変数 X の値がこの区間に入る確率が

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b h(x)dx$$

で表されるとき、 $h(x)$ は X の密度関数であると言います。

□

少しそれらしいことが書いてあるだけ 2点
記述の不十分さ -1点
大きな欠落のあるもの 5点

計算ミス -3点
定義のミスなど重大なミス -5点

3 確率変数 H の密度関数が次の $h(x)$ で与えられているとします：

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき確率 $P[-3 \leq H \leq 0]$ と平均値 $E[H]$ を求めて下さい。

配点：20点 シラバス達成度目標：ア、ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[-3 \leq H \leq 0] &= \int_{-3}^0 h(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+1)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

確率10点

$$\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx = \int_{-1}^1 xh(x)dx$$

ですが、 $h(x)$ は偶関数ですから $xh(x)$ は奇関数になり、従って積分値は0です。従って平均値は存在して

$$E[H] = 0$$

平均値10点

です。

□

4 確率変数 X が平均 50、分散 9 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して確率 $P[55 \leq X \leq 57]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ア、ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[55 \leq X \leq 57] &= P[5 \leq X - 50 \leq 7] \\ &= P\left[\frac{5}{3} \leq \frac{X - 50}{3} \leq \frac{7}{3}\right] \\ &= P\left[\frac{5}{3} \leq N(0, 1) \leq \frac{7}{3}\right] \\ &= P[1.667 \leq N(0, 1) \leq 2.333] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 2.333] - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.667] \\ &\sim 0.4901 - 0.452 \end{aligned}$$

~ 0.0381

0.4515から0.4525の間であれば良い

計算ミス - 3 点

重大なミス - 5 点

全体的にやるべきことが成されていれば 6 点

計算ミス - 3 点

書き間違いなど些細なミス - 2 点

5 区間 $[3, 5]$, $[0, 1]$ それぞれの上の一様分布の密度関数を f, g とします。このときたたみ込み $f * g$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ、オ

【解答例】 まず密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

である事に注意します。たたみ込みは

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy \\ &= \int_0^1 f(x - y)dy \end{aligned}$$

ですが、この被積分関数が 0 でない範囲は $3 \leq x - y \leq 5$ 、すなわち $x - 5 \leq y \leq x - 3$ ですから積分範囲内とこの範囲の重なり具合によって積分値が変わってきます。そこで x の値によって場合分けして考えます。

【 $x \leq 3$ の場合】 この場合 2 つの区間は重なりませんから積分値は 0 です。

【 $3 \leq x \leq 4$ の場合】 この場合、積分区間の中の区間 $[0, x - 3]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから、積分値は

$$(f * g)(x) = \int_0^{x-3} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(x - 3)$$

となります。

【 $4 \leq x \leq 5$ の場合】 この場合、積分区間全体で被積分関数がノンゼロですから、

$$(f * g)(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$$

です。

【 $5 \leq x \leq 6$ の場合】 この場合は積分区間内の区間 $[x-5, 1]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから

$$(f * g)(x) = \int_{x-5}^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(-x + 6)$$

【 $6 \leq x$ の場合】 この場合も2つの区間は重なりませんから積分値は0です。

以上からたたみ込みの結果は以下の通り：

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x-3) & 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{2}(-x+6) & 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & 6 \leq x \end{cases}$$

□

計算ミス - 3点

重大なミス - 5点

6 X が区間 $[-1, 1]$ 上の一様分布に従うとき、 X のモーメント $E[X^n]$ を全て求めて下さい。

配点：10点 シラバス達成度目標：ア、ウ

【解答例】 密度関数は

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であって、これは偶関数です。従ってモーメントの計算の積分は原点対象な有界区間での積分になりますから、奇関数の性質によって奇数次のモーメントは明らかに0です。偶数次の場合も簡単に積分されて：

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^{2m} dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2m+1} x^{2m+1} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2m+1} \end{aligned}$$

結局 n 次のモーメントは、

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} & n:\text{even} \\ 0 & n:\text{odd}. \end{cases}$$

です。

□

7 次の文章が正しいかどうか、○×のみで答えて下さい。

- (1) (X, Y) の密度が分かれば X, Y それぞれの密度も分かる。
- (2) X, Y それぞれの密度が分かれば (X, Y) の密度も分かる。

配点：各5点 シラバス達成度目標：イ、オ

【解答例】 (1) ○、(2) ×。

部分点なし

□