

問題 1 ある試験を 30000 人の受験者が受け、100 点満点のところ平均点が 63.6、標準偏差が 13.4 でした。

受験者の得点の全体を表す確率変数／データを X とし、 X は正規分布 $N(63.6, 13.4^2)$ に従うと仮定します。標準正規分布表を使って $P[80 \leq X]$ を求め、80 点の受験者はだいたい何位であるか概算して下さい。

配点：10 点	シラバス達成度目標：ア、ウ、エ
---------	-----------------

【解答例】 得点を表す確率変数 X は正規分布 $N(63.6, 13.4^2)$ に従っていると仮定されています。また、求めるべきものは 80 点より高得点の人が何人いるかであり、それは $P[80 < X]$ を求め、これに 30000 を掛ける事によって概算出来ます。これは

$$\begin{aligned} P[80 < X] &= P\left[\frac{80 - 63.6}{13.4} < \frac{X - 63.6}{13.4}\right] \\ &= P[1.22 < N(0, 1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.22] \end{aligned}$$

ですから正規分布表から

$$P[80 < X] = 0.5 - 0.3888 = 0.1112$$

が得られ、これに受験者総数の 30000 を掛けて 80 点より高得点の人が大体 3336 人だと分かります。従って 80 点の人は大体 3300 番程度であると考えられます。

問題 2 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 A について期待値 $E[A]$ と確率 $P[0.4 \leq A \leq 1.2]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：20 点	シラバス達成度目標：ア、ウ
---------	---------------

【解答例】

$$\begin{aligned} P[0.4 \leq A \leq 1.2] &= \int_{0.4}^{1.2} h(x) dx \\ &= \int_{0.4}^1 2x dx \\ &= [x^2]_{0.4}^1 \\ &= 1 - 0.16 \\ &= 0.84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[A] &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x) dx \\ &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

問題 3 正規分布 $N(5, 4)$ に従う確率変数 B について確率

$$P[2 \leq B \leq 7]$$

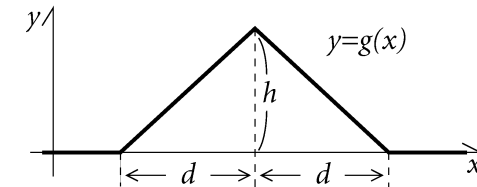
を標準正規分布表を使って求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ア、ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[2 \leq X \leq 7] &= P[-3 \leq N(0, 4) \leq 2] \\ &= P\left[-\frac{3}{2} \leq \frac{N(0, 4)}{2} \leq 1\right] \\ &= P[-1.5 \leq N(0, 1) \leq 1] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.5] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 1] \\ &= 0.4332 + 0.3413 \\ &= 0.7745 \end{aligned}$$

問題 4 密度関数が下図の様に底辺 $2d$ 、高さ h の三角形形状のグラフをもつ関数 $g(x)$ であるような確率変数 C の分散を求めて下さい。



ただし、 $d > 0, h > 0$ とします。

配点：5 点 シラバス達成度目標：ア、ウ

【解答例】 まず三角形の面積を計算すれば $h = \frac{1}{d}$ である事が分かります。

また、問題では分布の中心が具体的には与えられていませんが、確率変数に定数を足しても分散が変わらない事によれば中心はどこでもよく、中心が原点の場合に計算すれば良い事が分かります。

この場合奇関数の左右対称領域での積分が0である事から期待値は0であり、また分散も存在して偶関数の積分になり、片方の2倍で計算されます：

$$Var[A] = 2 \int_0^d x^2 \frac{1}{d^2} (d - x) dx = \frac{2}{d^2} \int_0^d (dx^2 - x^3) dx = \frac{2}{d^2} \left[\frac{d}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^d = \frac{1}{6} d^2.$$

問題 5 次の表は、ランダムに選ばれた 6 本の同一種の木について、高さ X と幹の周長 Y を測定したものです（単位メートル）。

X	8.7	6.8	7.9	7.0	7.1	6.1
Y	0.75	0.55	0.72	0.61	0.66	0.58

(1) X, Y の平均値 $E[X], E[Y]$ 、分散 $Var[X], Var[Y]$ と共分散 $Cov[X, Y]$ を求めて下さい。

(2) Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となることを利用して、高さが 8.0 メートルの木の幹の周囲を推測して下さい。

配点：30 点 シラバス達成度目標：ア、イ、オ

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{43.6}{6}, \quad E[Y] = \frac{3.87}{6}$$

$$Var[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{320.96}{6} - \left(\frac{43.6}{6}\right)^2 = \frac{24.8}{36}$$

$$Var[Y] = \frac{2.5275}{6} - \frac{14.9769}{36} = \frac{0.1881}{36}$$

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{28.447}{6} - \frac{168.732}{36} = \frac{1.95}{36}$$

(2) 従って Y の X への回帰直線は

$$y - \frac{3.87}{6} = \frac{1.95}{24.8} \left(x - \frac{43.6}{6}\right)$$

となり、これに $x = 8$ を代入すれば高さが 8 メートルの時の幹の周長の推測値が得られます：

$$y = \frac{1.95 \cdot 8 \cdot 6 - 1.95 \cdot 43.6 + 3.87 \cdot 24.8}{24.8 \cdot 6} = \frac{104.556}{148.8} \sim 0.70266 \sim 0.70.$$

従って幹の周長はおよそ 0.70 メートルと推察されます。

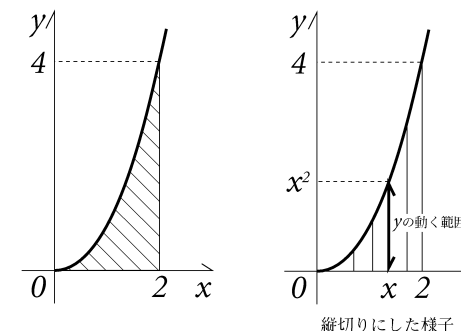
□

問題 6 不等式 $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 2$ の表す領域を D とし、 $h(x, y) = x^2 y$ とします。このとき、 D を床とし、 D の境界線上に垂直な壁を立て、曲面 $z = h(x, y)$ を屋根として囲まれる立体の体積を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：イ、オ

【解答例】 まずはこの立体を x -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えます。

領域 D を図示すると右図のようになって
います。立体を x -座標が x である平面で
切った時、まず床である領域 D は x -座標
が一定値 x である直線によって切断され、
この切り口は y -座標で言って $0 \leq y \leq x^2$
の範囲になっています（右図右参照）。



従って断面の断面積は

$$(\text{断面積}) = \int_0^{x^2} x^2 y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^{x^2} = \frac{1}{2} x^6$$

である事が分かり、この断面積を x で $[0, 2]$ の範囲で積分すれば体積が求められます：

$$(\text{体積}) = \int_0^2 \frac{1}{2} x^6 dx = \left[\frac{1}{14} x^7 \right]_0^2 = \frac{64}{7}.$$

問題 7 非負値関数 $h(x)$ が（1 次元の）確率変数 X の密度関数であるとはどう云うことか簡潔に説明して下さい。

配点：10 点 | シラバス達成度目標：ウ

【解答例】 任意の $a < b$ に対して

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b h(x) dx$$

となること。