問題 1 ある日のプロ野球公式戦において６球団の安打数と得点は以下の表の通りでした。

得点 A	3	2	7	1	1	2
安打 B	5	8	6	5	8	8

得点データを A、安打数データを B として A, B それぞれの平均値 $E[A], E[B]$ と分散 $Var[A], Var[B]$、A と B の共分散 $Cov[A, B]$ を求めて下さい。

ただし、全ての結果は一切の近似をせずに完全に正しい値を答えて下さい。分数が割り切れない場合は出来るだけ約分された分数の形で答えて下さい。

配点：３５点	シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】

$$
\begin{aligned}
E[A] &= \frac{3+2+\cdots+2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\
E[B] &= \frac{5+8+\cdots+8}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \\
Var[A] &= \frac{3^2+2^2+\cdots+2^2}{6} - \left(\frac{16}{6}\right)^2 = \frac{68}{6} - \frac{16^2}{6^2} = \frac{38}{9} \\
Var[B] &= \frac{5^2+8^2+\cdots+8^2}{6} - \left(\frac{40}{6}\right)^2 = \frac{278}{6} - \frac{40^2}{6^2} = \frac{17}{9} \\
Cov[A,B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\
&= \frac{15+16+\cdots+16}{6} - \frac{8}{3}\frac{20}{3} = 16 - \frac{160}{9} = -\frac{7}{9}
\end{aligned}
$$

□

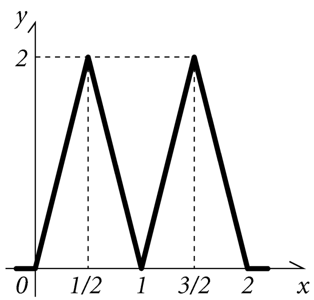
問題 2 密度関数が

$$
h(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 2x-2 & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ -2x+4 & \frac{3}{2} \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

で与えられる確率変数 X の平均値と確率 $P\left[\frac{1}{4} \le X \le \frac{5}{4}\right]$ を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】　この密度関数は下図の通りです：



まず平均値が存在することは明らかであり、また 1 を中心として左右対称に分布しているのでその平均値は 1 になります。

また問題の確率も面積を計算すれば明らかに $\frac{1}{2}$ です。

□

問題 **3** 確率変数 Q が正規分布 $N(150, 36)$ に従うとき、標準正規分布表を使って確率 $P[165 \leq Q]$ を求めて下さい。

配点：１２点	シラバス達成度目標：エ

【解答例】

$$
\begin{aligned}
P[165 \leq Q] &= P[165 \leq N(150, 36)] \\
&= P[15 \leq N(0, 36)] \\
&= P\left[\frac{15}{6} \leq N(0, 1)\right] \\
&= P[2.5 \leq N(0, 1)] \\
&= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 2.5] \\
&\sim 0.5 - 0.4938 \\
&\sim 0.0062
\end{aligned}
$$

□

問題 **4** ２次元の確率変数 (X, Y) があって、成分確率変数 X, Y は共に区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従い、互いに独立であるとします。このとき以下の問いに答えて下さい。

（１）$[0, 1]$ 区間上の一様分布の密度関数 f について、たたみ込み $(f * f)(x)$ を計算して下さい。

ただし、２つの関数 v, w のたたみ込み $(v * w)(x)$ は

$$(v * w)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)w(y)dy$$

で定義されるものとします。

（２）$X + Y$ の密度関数がたたみ込み $(f * f)(x)$ となることは既知とします。（１）の結果を使って確率 $P[X + Y \leq 1]$ を求めて下さい。

配点：（１）５点、（２）３点	シラバス達成度目標：オ

【解答例】　（１）問題の一様分布の密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ですから、

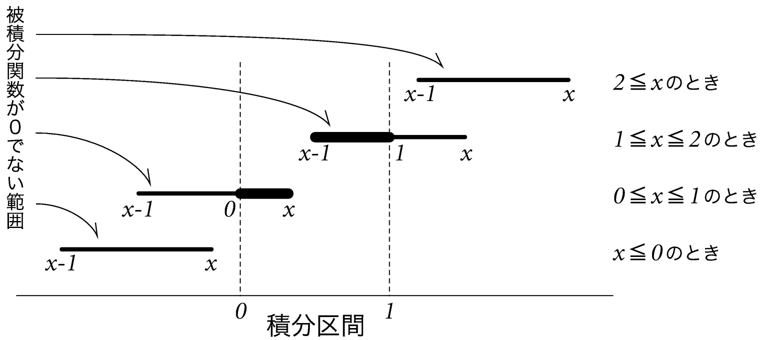
$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

であり、まず被積分関数のうち第２因子 $f(y)$ の方を具体化すると

$$= \int_0^1 f(x-y)dy$$

となります。

次に残った部分を具体化するわけですが、定義により被積分関数は $0 \leq x - y \leq 1$ すなわち $x - 1 \leq y \leq x$ である範囲以外では０となるのでこの範囲 $[x-1, x]$ が積分区間 $[0, 1]$ とどう交わるかが問題となります。これを x の値によって場合分けするわけですが、



２つの区間が重なりをもつ場合にだけ実際の積分計算が出現して以下の通りになります：

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ \int_{x-1}^{1} dy & 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^x dy & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

（２）

$$\begin{aligned} P[X + Y \leq 1] &= \int_{-\infty}^{1} (f * f)(x) dx \\ &= \int_0^1 x dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

問題 **5** 次の文章は正しいでしょうか、間違っているでしょうか。○/×のみで答えて下さい。

（１）標本分散の平均値は母集団の分散に一致します。
（２）標本平均の平均値は母集団の平均値に一致します。
（３）標本のサイズが十分大きければ、母集団がどんな分布であっても標本平均は正規分布で良く近似されます。

配点：（１）４点、（２）３点、（３）３点	シラバス達成度目標：カ、キ

【解答例】　（１）×、（２）○、（３）○。

□

問題 **6** 母集団 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。この母集団から大きさ 25 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプルの平均値が 54.3 でした。母平均の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：カ、ク

【解答例】　母平均を m とします。するとこの母集団からとった大きさ２５の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{10^2}{25}\right)$ に従います。

そこでまず

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|\bar{X} - m| \leq d] \\ &= P\left[\left|N\left(m, \frac{10^2}{25}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0,1)| \leq \frac{d}{2}\right] \\ &= 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{2}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{2}\right] \end{aligned}$$

ですから、標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{2} \sim 1.96, \quad \text{従って} \quad d \sim 3.92$$

が分かります。以上から

$$P[|\bar{X} - m| \leq 3.92] \sim 0.95$$

が成り立ちますから、今回のサンプル値 54.3 について、信頼度 95 %で

$$\begin{aligned} |54.3 - m| &\leq 3.92 \\ 54.3 - 3.92 &\leq m \leq 54.3 + 3.92 \\ 50.38 &\leq m \leq 58.22 \end{aligned}$$

が成り立つと言えます。従って求める信頼区間は $[50.38, 58.22]$ です。

□

問題 **7** ある工場で生産しているスチールパイプについて、直径の平均値は 20.0mm であると工場は言っています。しかし疑義が生じたためサンプルサイズ１００・有意水準１％で仮説検定することになりました。

（１）帰無仮説・対立仮説を

帰無仮説 H_0：　『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm である』
対立仮説 H_1：　『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm でない』

とし、帰無仮説 H_0 が正しいと仮定して有意水準１％の両側棄却域を求めて下さい。
　ただし、スチールパイプの直径の分散は、過去のデータから常に 0.23^2 であって、この点については疑義は生じていないものとします。

（２）この工場で生産されているスチールパイプから実際に１００個取り出して直径を測定したところ、平均値が 20.2mm でした。工場の主張は正しいと言えるでしょうか、有意水準１％で検定して下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：カ、ケ

【解答例】　（１）帰無仮説が正しいと仮定します。
　有意水準１％の両側棄却域を求めるには

$$P[|\bar{X}-20.0|\geq d]=0.01$$

となる $d>0$ を求める訳ですが、母分散が 0.23^2 であってサンプルサイズが大きいですから、この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は中心極限定理により正規分布 $N\left(20.0,\frac{0.23^2}{100}\right)$ で近似され、

$$\begin{aligned}0.01&=P[|\bar{X}-20.0|\geq d]\\&\sim P\left[\left|N\left(20.2,\frac{0.23^2}{100}\right)-20.0\right|\geq d\right]\\&=P\left[|N(0,1)|\geq\frac{d}{0.023}\right]\\0.495&=P\left[0\leq N(0,1)\leq\frac{d}{0.023}\right]\end{aligned}$$

ですから標準正規分布表から

$$\frac{d}{0.023}\sim 2.575\quad\text{従って}\quad d\sim 0.059225$$

が分かります。
　以上から、求める棄却域は

$$(-\infty,19.94]\cup[20.06,\infty)$$

です。
　（２）今回のサンプル値 20.2 は上で求めた棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、スチールパイプの直径の平均値は 20.0mm ではないと考えられ、工場の主張は正しくないと判断されます。

□