

1 (1)有限データ $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ の平均値の定義式を書いて下さい。

(2)密度関数が $h(x)$ であるような確率変数 B の分散の定義式を積分を使って書いて下さい（分散は存在するものとします）。

配点：(1) 10 点、(2) 5 点

シラバス達成度目標：ア、ウ

【解答例】 (1)

$$E[A] = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

(2) B の期待値を m としたとき、

$$Var[B] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 h(x) dx$$

です。

2 次の表のような2次元のデータ (X, Y) について以下の問いに答えて下さい。

X	8.7	6.8	7.9	7.0	7.2	6.2
Y	0.75	0.55	0.73	0.61	0.66	0.60

(1) X, Y それぞれの平均値 $E[X]$ 、 $E[Y]$ 、 X の分散 $Var[X]$ 、 X, Y の共分散 $Cov[X, Y]$ を求めて下さい。ただし、分数計算が割り切れない場合は四捨五入等の近似は一切せず、分数の形で答えて下さい。

(2) Y の X への回帰直線：

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

を利用して X が 8.0 のときの Y の値を推測して下さい。ただし、最終的な答えは小数点以下 3 桁目を四捨五入して小数点以下 2 桁で答えて下さい。

配点：30 点

シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{8.7 + \cdots + 6.2}{6} = \frac{43.8}{6} = 7.3$$
$$E[Y] = \frac{0.75 + \cdots + 0.60}{6} = \frac{3.9}{6} = 0.65$$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$
$$\begin{aligned} &= \frac{(8.7 - 7.3)^2 + (6.8 - 7.3)^2 + (7.9 - 7.3)^2}{6} \\ &\quad + \frac{(7.0 - 7.3)^2 + (7.2 - 7.3)^2 + (6.2 - 7.3)^2}{6} \\ &= \frac{1.4^2 + (-0.5)^2 + 0.6^2 + (-0.3)^2 + (-0.1)^2 + (-1.1)^2}{6} \\ &= \frac{1.96 + 0.25 + 0.36 + 0.09 + 0.01 + 1.21}{6} \\ &= \frac{3.88}{6} \end{aligned}$$

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1.4(0.75 - 0.65) + (-0.5)(0.55 - 0.65) + 0.6(0.73 - 0.65) \\
 &\quad + (-0.3)(0.61 - 0.65) + (-0.1)(0.66 - 0.65) + (-1.1)(0.60 - 0.65)}{6} \\
 &= \frac{1.4 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.08 + 0.3 \cdot 0.04 - 0.1 \cdot 0.01 + 1.1 \cdot 0.05}{6} \\
 &= \frac{0.14 + 0.05 + 0.048 + 0.012 - 0.001 + 0.055}{6} \\
 &= \frac{0.304}{6}
 \end{aligned}$$

(2) 題意より、求める Y の値 y は

$$\begin{aligned}
 y - 0.65 &= \frac{\frac{0.304}{6}}{\frac{3.88}{6}}(8 - 7.3) \\
 y &= \frac{0.304}{3.88}0.7 + 0.65 \\
 &= \frac{0.2128}{3.88} + 0.65 \\
 &= 0.05484 \cdots + 0.65 \\
 &\sim 0.70
 \end{aligned}$$

となります。

3 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 C について、確率 $P[-1 \leq C \leq 1]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

配点：10 点

シラバス達成度目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned}
 P[-1 \leq A \leq 1] &= \int_{-1}^1 h(x) dx \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \right) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

4 確率変数 G が正規分布 $N(-2, 9)$ に従うとき、 $P[w \leq G] = 0.0102$ となるような w の値を標準正規分布表を使って求めて下さい。

配点：10 点

シラバス達成度目標：エ

【解答例】

$$\begin{aligned} 0.0102 &= P[w \leq G] \\ &= P[w \leq N(-2, 9)] \\ &= P\left[\frac{w+2}{3} \leq \frac{N(-2, 9)+2}{3}\right] \\ &= P\left[\frac{w+2}{3} \leq N(0, 1)\right] \end{aligned}$$

この確率が 0.5 未満なので $0 < \frac{w+2}{3}$ であって

$$\begin{aligned} &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{w+2}{3}\right] \\ P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{w+2}{3}\right] &= 0.4898 \end{aligned}$$

ですから正規分布表から

$$\frac{w+2}{3} \sim 2.32 \quad \text{すなわち} \quad w = 4.96$$

が分かります。

5 xy -平面内の長方形 $[2, 4] \times [1, 2] = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立て、曲面 $z = xy + 1$ で蓋をした立体の体積を求めて下さい。

配点：10 点

シラバス達成度目標：ウ、オ

【解答例】 この立体を x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の断面積は

$$\begin{aligned} (\text{断面積}) &= \int_1^2 (xy + 1) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} xy^2 + y \right]_1^2 \\ &= 2x + 2 - \frac{1}{2}x - 1 \\ &= \frac{3}{2}x + 1 \end{aligned}$$

ですから、これを $2 \leq x \leq 4$ で積分すれば体積が得られます：

$$\begin{aligned} (\text{体積}) &= \int_2^4 \left(\frac{3}{2}x + 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^2 + x \right]_2^4 \\ &= 12 + 4 - 3 - 2 \\ &= 11. \end{aligned}$$

6 非負値連続関数 $h(x, y)$ が2次元の確率変数 $\mathbb{X} = (X, Y)$ の密度関数であるとはどう云うことか、簡潔に説明して下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ、オ

【解答例】 xy -平面内の任意の（良い）領域 D に対して

$$P[\mathbb{X} \in D] = \left(\begin{array}{l} \text{領域 } D \text{ を底面とし、その周囲に垂直な壁をたて、} \\ \text{曲面 } z = h(x, y) \text{ で蓋をした立体の体積} \end{array} \right)$$

が成り立つとき、関数 $h(x, y)$ は $\mathbb{X}$ の密度関数であると言います。

7 次の各文章の内容が正しいかどうか、○×のみで答えて下さい。

- (1) X, Y それぞれの密度関数が分かれば (X, Y) の密度関数も分かる。
- (2) 期待値は存在しないが分散は有限値として存在するような確率変数もある。
- (3) 分散が存在する限り $Var[A + B] = Var[A] + Var[B]$ である。

配点：各 5 点 シラバス達成度目標：ア、イ、ウ、オ

【解答例】 (1) × (2) × (3) ×.