

1 ある工場で機械 A によって作られた製品の平均重量は 5.68g でした。その後新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られるようになりましたが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 100 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.73g、標準偏差が 0.19g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また標準偏差はサンプル値の 0.19g であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準 5 % で仮説検定して下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ケ

【解答例】 帰無仮説 H_0 ：『B で作られた製品の平均重量は 5.68g である』
対立仮説 H_1 ：『B で作られた製品の平均重量は 5.68g でない』

帰無仮説 H_0 を仮定します。すると問題に書かれている仮定から、B で作られた製品全体の中から取った大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(5.68, \frac{0.19^2}{100}\right)$ に従います。

問題は平均重量に変化があったかどうかですから、有意水準 5 % の両側棄却域を設定します。そのためには

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めれば良いわけですが、標準化して

$$\begin{aligned} &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.19^2}{100}\right)\right| \geq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{\frac{0.19}{10}}\right] \\ &= 1 - 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.019}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.019}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{0.019} \approx 1.96$ 、つまり、 $d \approx 0.03724$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[|\bar{X} - 5.68| \geq 0.03724] \approx P[\bar{X} \leq 5.64, \text{ または } 5.72 \leq \bar{X}]$$

を意味し、棄却域は $(-\infty, 5.64] \cup [5.72, \infty)$ となります。

今回のサンプル値 5.73 はこの棄却域に入っていますので仮説 H_0 は棄却され、平均重量は変化したと言えることが分かります。

2 ある工場でこの日に生産された部品の中から 100 個を任意抽出して強度試験をしたところ、平均強度は 157kg でした。経験から母集団（この日生産された部品の強度全体）の標準偏差は 3kg であると考えて良いことが分かっています。母平均の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス達成度目標：力、ク
---------	---------------

【解答例】 母平均を m 、大きさ 100 の標本平均を A とします。標本サイズが大きいので、中心極限定理により A は正規分布 $N\left(m, \frac{3^2}{100}\right)$ で近似されます。

まず

$$P[|A - m| \leq d] = 0.95$$

となるような d を求めると、

$$\begin{aligned} 0.95 &\sim P\left[\left|N\left(m, \frac{3^2}{100}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[\left|N(0, 1)\right| \leq \frac{d}{\frac{3}{10}}\right] \\ 0.475 &\sim P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{3}{10}}\right] \end{aligned}$$

ですから標準正規分布表によって

$$\frac{d}{\frac{3}{10}} \sim 1.96, \quad d \sim 0.588$$

が分かります。

すると今回のサンプル値である 157 について、信頼度 95 % で

$$|157 - m| \leq 0.588, \quad \text{従って} \quad 156.412 \leq m \leq 157.588$$

が成り立っているとと言えます。従って求める信頼区間は $[156.412, 157.588]$ です。

3 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

(1) 正規母集団における母平均の区間推定において、他の条件が同じであれば、信頼度を 95 % から 99 % に上げると信頼区間の幅は狭くなる。

(2) 正規母集団における母平均の区間推定において、他の条件が同じであれば、信頼度を 95 % から 99 % に上げると信頼区間の幅は広くなる。

(3) 正規母集団における母平均の仮説検定において、他の条件が同じであれば、有意水準を 5 % から 10 % に上げると対応した棄却域は狭くなる。

(4) 正規母集団における母平均の仮説検定において、他の条件が同じであれば、有意水準を 5 % から 10 % に上げると対応した棄却域は広くなる。

(5) 標本平均の分散は母集団の分散より大きい。

(6) 標本分散の平均は母集団の平均より大きい。

(7) 母集団が正規分布でなくても、標本のサイズが 100 であれば標本平均は正規分布に従う。

配点：(1)(2) で 4 点、(3)(4) で 4 点、(5)～(7) 各 4 点
--

シラバス達成度目標：力、キ、ク、ケ

【解答例】 (1) ×、(2) ○、(3) ×、(4) ○、(5) ×、(6) ×、(7) ×。

4 D を (x, y) 平面上の次の長方形：

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

とし、密度関数が

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2(\cos y + \sin y) & (x, y) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるような確率変数 $\mathbb{X} = (X, Y)$ について、次の確率を求めて下さい：

$$P\left[\mathbb{X} \in [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right] \left(= P\left[0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq \frac{\pi}{4}\right]\right).$$

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ、オ

【解答例】

$$\begin{aligned} P\left[0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq \frac{\pi}{4}\right] &= \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2(\cos y + \sin y) dy dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 x^2 [\sin y - \cos y]_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{8} [x^3]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

です。

5 (1) X が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、確率 $P[3 \leq X \leq 8]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ、エ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} P[3 \leq X \leq 8] &= P[-2 \leq N(0, 4) \leq 3] \\ &= P\left[-1 \leq \frac{N(0, 4)}{2} \leq \frac{3}{2}\right] \\ &= P[-1 \leq N(0, 1) \leq 1.5] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.5] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 1] \\ &= 0.4332 + 0.3413 \\ &= 0.7745 \end{aligned}$$

5 (2) 表・裏がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で出る正常な硬貨を 400 回投げて表の出る回数を確率変数 X とするときに、2 項分布を正規分布で近似する方法によって、確率 $P[190 \leq X \leq 210]$ を求めて下さい。

配点：5 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】 (2) X は 2 項分布 $B(400, 0.5)$ に従いますが、これは正規分布 $N(200, 100)$ で近似する事が出来、

$$\begin{aligned}
 P[190 \leq X \leq 210] &= \sum_{j=190}^{210} P[X = j] \\
 &\approx \sum_{j=190}^{210} P[j - 0.5 \leq N(200, 100) \leq j + 0.5] \\
 &= P[189.5 \leq N(200, 100) \leq 210.5] \\
 &= P\left[\frac{189.5 - 200}{10} \leq N(0, 1) \leq \frac{210.5 - 200}{10}\right] \\
 &= P[-1.05 \leq N(0, 1) \leq 1.05] \\
 &= 2P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.05] \\
 &= 2 \cdot 0.3531 \\
 &= 0.7062
 \end{aligned}$$

と近似されます。

6 次の表は 6 本の木について高さ X と幹の周長 Y を測定したものです。

X	8.7	6.8	7.9	7.0	7.1	6.1
Y	0.75	0.55	0.72	0.61	0.66	0.58

X, Y の平均値、分散、共分散を求めて下さい。

配点：25 点 シラバス達成度目標：ア、イ

【解答例】

$$E[X] = \frac{43.6}{6} \approx 7.2667$$

$$E[Y] = \frac{3.87}{6} = 0.645$$

$$\begin{aligned}
 Var[X] &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 \\
 &= \frac{320.96}{6} - \left(\frac{43.6}{6}\right)^2 \\
 &= \frac{24.8}{36} \\
 &\approx 0.6889
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Var[Y] &= \frac{2.5275}{6} - \frac{14.9769}{36} \\
 &= \frac{0.1881}{36} \\
 &\approx 0.005225
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
 &= \frac{28.447}{6} - \frac{168.732}{36} \\
 &= \frac{1.95}{36} \\
 &\approx 0.054167
 \end{aligned}$$

7 区間 $[0, 1]$ 上の一様分布の密度関数を $g(x)$ とするとき、たたみ込み $(g * g)(x)$ を計算して下さい。

配点：10 点

シラバス達成度目標：オ

【解答例】 この一様分布の密度関数は

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ですから、

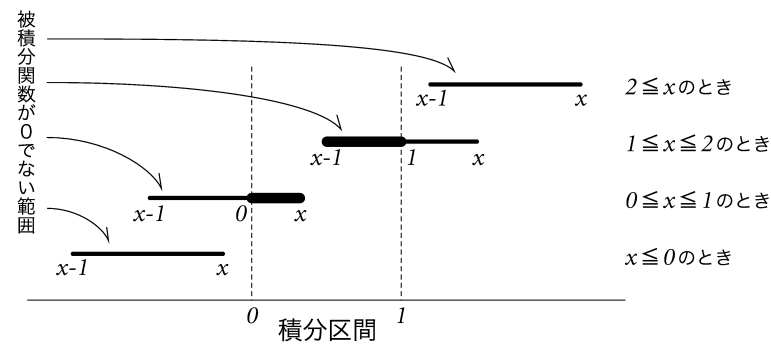
$$(g * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y)g(y)dy$$

であり、まず被積分関数のうち第 2 因子 $g(y)$ の方を具体化すると

$$= \int_0^1 g(x - y)dy$$

となります。

次に残った部分の具体化ですが、定義により被積分関数は $0 \leq x - y \leq 1$ すなわち $x - 1 \leq y \leq x$ である範囲以外では 0 となるのでこの範囲 $[x - 1, x]$ が積分区間 $[0, 1]$ とどう交わるかが問題となります。これを x の値によって場合分けするわけですが、下図：



によれば、2 つの区間が重なりをもつ場合にだけ実際の積分計算が出現して以下の通り

になります：

$$(g * g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x dy & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{x-1}^1 dy & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$