

1 新しく開発した制がん剤を、がんになっている 10 匹のモルモットに投与し、体重と生存日数の統計をとったところ次の様になりました：

(520mg,42days), (370,20), (740,54), (580,30), (920,68),
(420,34), (820,55), (680,40), (550,40), (500,17)

第 1 成分（体重）データを X 、第 2 成分（生存日数）データを Y として以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい（近似はしないこと）。
- (2) X, Y の共分散を求めて下さい（近似はしないこと）。
- (3) Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、体重が 1010mg の場合の生存日数を推定して下さい。

配点：(1)30 点、(2)(3)10 点	シラバス到達目標：ア、イ
-----------------------	--------------

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{520 + \cdots + 500}{10} = \frac{6100}{10} = 610$$

$$E[Y] = \frac{42 + \cdots + 17}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \frac{(520 - 610)^2 + \cdots + (500 - 610)^2}{10} \\ &= \frac{90^2 + 240^2 + 130^2 + 30^2 + 310^2 + 190^2 + 210^2 + 70^2 + 60^2 + 110^2}{10} \\ &= \frac{8100 + 57600 + 16900 + 900 + 96100 + 36100 + 44100 + 4900 + 3600 + 12100}{10} \\ &= \frac{280400}{10} \\ &= 28040 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \frac{(520 - 610)(42 - 40) + \cdots + (500 - 610)(17 - 40)}{10} \\ &= \frac{(-90)2 + (-240)(-20) + 130 \cdot 14 + (-30)(-10) + 310 \cdot 28}{10} \\ &\quad + \frac{(-190)(-6) + 210 \cdot 15 + 70 \cdot 0 + (-60)0 + (-110)(-23)}{10} \\ &= \frac{-180 + 4800 + 1820 + 300 + 8680 + 1140 + 3150 + 2530}{10} \\ &= 2224 \end{aligned}$$

(3) 回帰直線は

$$y - 40 = \frac{2224}{28040}(x - 610)$$

ですから、体重が 1310mg の時の生存日数の推定値は

$$y = \frac{2224}{28040}400 + 40 = \frac{889600}{28040} + 40 \sim 71.73$$

となります。

□

2 密度関数が

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[1 \leq X \leq \sqrt{3}]$ を計算して下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：ウ、エ
---------	--------------

【解答例】

$$\begin{aligned} P[1 \leq X \leq \sqrt{3}] &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} [\text{Tan}^{-1} x]_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

□

3 平均 34.5、標準偏差 2.5 の正規分布に従う確率変数 W に対して、右の正規分布表を使って確率 $P[33 \leq W \leq 40]$ を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：ウ、エ
---------	--------------

【解答例】

$$\begin{aligned} P[33 \leq W \leq 40] &= P[33 \leq N(34.5, 2.5^2) \leq 40] \\ &= P[-1.5 \leq N(0, 2.5^2) \leq 5.5] \\ &= P\left[-\frac{1.5}{2.5} \leq N(0, 1) \leq \frac{5.5}{2.5}\right] \\ &= P[-0.6 \leq N(0, 1) \leq 2.2] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 0.6] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 2.2] \\ &\approx 0.2257 + 0.4861 \\ &\approx 0.7118 \end{aligned}$$

□

4 次の関数 $f(x)$ に対してたたみ込み $f * f$ を計算して下さい。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \left(\text{ただし、} (v * w)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)w(y)dy \right)$$

配点：15 点

シラバス到達目標：オ

【解答例】

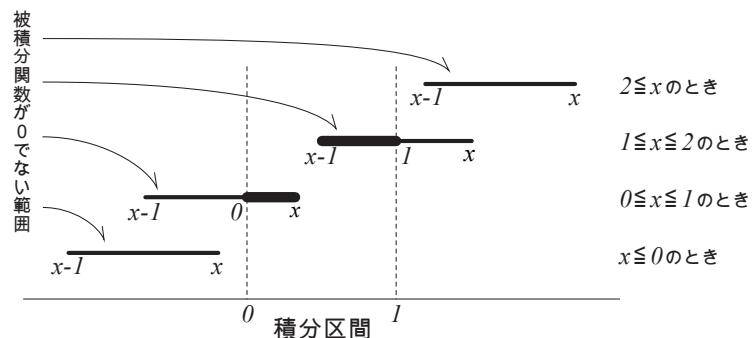
$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

であり、まず被積分関数のうち第2因子 $f(y)$ の方を具体化すると

$$= \int_0^1 f(x-y)dy$$

となります。

次に残った $f(x-y)$ の部分ですが、定義により被積分関数は $0 < x-y < 1$ すなわち $x-1 < y < x$ である範囲以外では0となるのでこの範囲 $[x-1, x]$ が積分区間 $[0, 1]$ とどう交わるかが問題となります。これを x の値によって場合分けすると下図のように：



なっており、従って2つの区間が重なりをもつ場合にだけ実際の積分計算が出現して以

下の通りになります：

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ \int_{x-1}^1 dy & 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^x dy & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

□

5 xy -平面内の領域 D を

$$D : \begin{cases} x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

とします。確率変数 X の密度関数が

$$h(x, y) = \begin{cases} 5xy^2 + 3x & (x, y) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるとき、確率 $P\left[X \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right]$ を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：オ
---------	------------

【解答例】

$$\begin{aligned} P\left[X \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right] &= \iint_{D \cap \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]} (5xy^2 + 3x) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{\frac{1}{2}} (5xy^2 + 3x) dy dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{5}{3}xy^3 + 3xy \right]_x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{5}{24}x + \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}x^4 - 3x^2 \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{41}{24}x - \frac{5}{3}x^4 - 3x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{41}{48}x^2 - \frac{1}{3}x^5 - x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{41}{192} - \frac{1}{96} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{15}{192} \\ &= \frac{5}{64} \end{aligned}$$

□