

1 ある工場で生産しているスチールパイプについて、直径の平均値は 20.0mm であると工場は言っていますが、疑義が生じたためサンプルサイズ 100・有意水準 1% で仮説検定することになりました。

(1) 帰無仮説・対立仮説を

帰無仮説 H_0 : 『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm である』

対立仮説 H_1 : 『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm でない』

とし、帰無仮説 H_0 が正しいと仮定して有意水準 1% の両側棄却域を求めて下さい。
ただし、スチールパイプの直径の分散は、過去のデータから常に 0.23^2 であって、この点については疑義は生じていないものとします。

(2) この工場で生産されているスチールパイプから実際に 100 個取り出して直径を測定したところ、平均値が 20.2mm でした。工場の主張は正しいと言えるでしょうか、有意水準 1% で検定して下さい。

配点：(1)10 点、(2)5 点 シラバス到達目標：力、ケ

【解答例】 (1) 帰無仮説が正しいと仮定します。

有意水準 1% の両側棄却域を求めるには

$$P[|\bar{X} - 20.0| \geq d] = 0.01$$

となる $d > 0$ を求める訳ですが、母分散が 0.23^2 であってサンプルサイズが大きいことから、この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は中心極限定理により正規分布 $N\left(20.0, \frac{0.23^2}{100}\right)$ で近似され、

$$\begin{aligned} 0.01 &= P[|\bar{X} - 20.0| \geq d] \\ &\approx P\left[\left|N\left(20.2, \frac{0.23^2}{100}\right) - 20.0\right| \geq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{0.023}\right] \\ 0.495 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \end{aligned}$$

ですから標準正規分布表から

$$\frac{d}{0.023} \approx 2.575 \quad \text{従って} \quad d \approx 0.059225$$

が分かります。

以上から、求める棄却域は

$$(-\infty, 19.94] \cup [20.06, \infty)$$

です。

(2) 今回のサンプル値 20.2 は上で求めた棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、スチールパイプの直径の平均値は 20.0mm ではないと考えられ、工場の主張は正しくないと判断されます。 □

2 母集団 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。この母集団から大きさ 25 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプルの平均値が 54.3 でした。母平均の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：カ、ク

【解答例】 母平均を m とします。するとこの母集団からとった大きさ 25 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{10^2}{25}\right)$ に従います。

そこでまず

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|\bar{X} - m| \leq d] \\ &= P\left[\left|N\left(m, \frac{10^2}{25}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{2}\right] \\ &= 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{2}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{2}\right] \end{aligned}$$

ですから、標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{2} \approx 1.96, \quad \text{従って} \quad d \approx 3.92$$

が分かります。以上から

$$P[|\bar{X} - m| \leq 3.92] \approx 0.95$$

が成り立ちますから、今回のサンプル値 54.3 について、信頼度 95 % で

$$|54.3 - m| \leq 3.92$$

$$54.3 - 3.92 \leq m \leq 54.3 + 3.92$$

$$50.38 \leq m \leq 58.22$$

が成り立つと言えます。従って求める信頼区間は $[50.38, 58.22]$ です。

□

3 分布密度関数が次の $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられている確率変数 X に対して、確率 $P[0.5 \leq X \leq 2]$ 、平均値 $E[X]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】 まず確率は

$$\begin{aligned} P[0.5 \leq X \leq 2] &= \int_{0.5}^2 f(x) dx \\ &= \int_{0.5}^1 2x dx \\ &= [x^2]_{0.5}^1 \\ &= 1 - 0.25 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

であり、平均値は

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

です。

□

4 次の2次元データ (A, B) について、 A, B の期待値と分散を求め、共分散 $Cov[A, B]$ も求めて下さい。

データ (A, B)
$(8, 3), (6, 6), (5, 4), (7, 3), (7, 5), (7, 6), (11, 5), (7, 9), (4, 2), (8, 5)$

ただし、四捨五入等の近似は一切せず有限小数の形で解答して下さい。

$$\begin{aligned} Cov[A, B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\ &= \frac{24 + 36 + 20 + 21 + 35 + 42 + 55 + 63 + 8 + 40}{10} - 7 \cdot \frac{48}{10} \\ &= \frac{344 - 7 \cdot 48}{10} \\ &= \frac{8}{10} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

□

配点：25 点 シラバス到達目標：イ、オ

【解答例】

$$\begin{aligned} E[A] &= \frac{8 + 6 + 5 + 7 + 7 + 7 + 11 + 7 + 4 + 8}{10} = 7 \\ Var[A] &= E[(A - E[A])^2] = \frac{1^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2}{10} = \frac{32}{10} = 3.2 \\ E[B] &= \frac{3 + 6 + 4 + 3 + 5 + 6 + 5 + 9 + 2 + 5}{10} = \frac{48}{10} = 4.8 \\ Var[B] &= E[B^2] - E[B]^2 \\ &= \frac{9 + 36 + 16 + 9 + 25 + 36 + 25 + 81 + 4 + 25}{10} - \left(\frac{48}{10}\right)^2 \\ &= \frac{266}{10} - \frac{24^2}{5^2} \\ &= \frac{266 \cdot 5 - 24^2 \cdot 2}{50} \\ &= \frac{1330 - 1152}{50} \\ &= \frac{178}{50} \\ &= 3.56 \end{aligned}$$

5 確率変数 X が二項分布 $B(400, 0.5)$ に従うとき、正規分布で近似する方法により確率 $P[190 \leq X \leq 210]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：エ

【解答例】 X は正規分布 $N(200, 100)$ で近似する事が出来、

$$\begin{aligned}
 P[190 \leq X \leq 210] &= \sum_{j=190}^{210} P[X = j] \\
 &\approx \sum_{j=190}^{210} P[j - 0.5 \leq N(200, 100) \leq j + 0.5] \\
 &= P[189.5 \leq N(200, 100) \leq 210.5] \\
 &= P\left[\frac{189.5 - 200}{10} \leq N(0, 1) \leq \frac{210.5 - 200}{10}\right] \\
 &= P[-1.05 \leq N(0, 1) \leq 1.05] \\
 &= 2P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.05] \\
 &\approx 2 \cdot 0.3531 \\
 &= 0.7062
 \end{aligned}$$

と近似されます。

□

6 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

- (1) 大きさ 100 の標本平均の分散は母集団の分散より小さい。
- (2) 大きさ 100 の標本平均の分散は母集団の分散より大きい。
- (3) 大きさ 10 の標本分散の平均は母集団の分散より小さい。
- (4) 大きさ 10 の標本分散の平均は母集団の分散より大きい。
- (5) 標準正規分布に従う確率変数の自乗はカイ自乗分布に従う。
- (6) 正規分布に従う確率変数の 3 倍は正規分布に従う。

配点：(1)(2)5 点、(3)(4)5 点、(5)5 点、(6)5 点 シラバス到達目標：カ、キ

【解答例】 (1) ○、(2) ×、(3) ○、(4) ×、(5) ○、(6) ○。

□

7 確率変数 A は正規分布 $N(1, 1)$ に従い、 B は正規分布 $N(2, 5)$ に従っており、 A, B は独立とします。このとき確率 $P[B - 2A > 1.23]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：エ、オ

【解答例】 $B - 2A$ は平均 $2 - 2 \cdot 1 = 0$ 、分散 $5 + 4 \cdot 1 = 9$ の正規分布 $N(0, 9)$ に従いますから、

$$\begin{aligned} P[B - 2A > 1.23] &= P[N(0, 9) > 1.23] \\ &= P[N(0, 1) > 0.41] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 0.41] \\ &\approx 0.5 - 0.1591 \\ &\approx 0.3409 \end{aligned}$$

です。 □