

1 新しく開発した制がん剤ががんになっている 10 匹のモルモットに投与し、体重と生存日数の統計をとったところ次の様になりました：

(520mg,42days),(370,20),(740,54),(580,30),(920,68),
(420,34),(820,55),(680,40),(550,40),(500,17)

第 1 成分（体重）データを X 、第 2 成分（生存日数）データを Y として以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい（近似はしないこと）。
- (2) X, Y の共分散を求めて下さい（近似はしないこと）。
- (3) Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、体重が 1310mg の場合の生存日数を推定して下さい。

配点：(1)25 点、(2)(3)5 点	シラバス到達目標：ア、イ、オ
----------------------	----------------

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{520 + \cdots + 500}{10} = \frac{6100}{10} = 610$$

$$E[Y] = \frac{42 + \cdots + 17}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \frac{(520 - 610)^2 + \cdots + (500 - 610)^2}{10} \\ &= \frac{90^2 + 240^2 + 130^2 + 30^2 + 310^2 + 190^2 + 210^2 + 70^2 + 60^2 + 110^2}{10} \\ &= \frac{8100 + 57600 + 16900 + 900 + 96100 + 36100 + 44100 + 4900 + 3600 + 12100}{10} \\ &= \frac{280400}{10} \\ &= 28040 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \frac{(520 - 610)(42 - 40) + \cdots + (500 - 610)(17 - 40)}{10} \\ &= \frac{(-90)2 + (-240)(-20) + 130 \cdot 14 + (-30)(-10) + 310 \cdot 28 \\ &\quad + (-190)(-6) + 210 \cdot 15 + 70 \cdot 0 + (-60)0 + (-110)(-23)}{10} \\ &= \frac{-180 + 4800 + 1820 + 300 + 8680 + 1140 + 3150 + 2530}{10} \\ &= 2224 \end{aligned}$$

(3) 回帰直線は

$$y - 40 = \frac{2224}{28040}(x - 610)$$

ですから、体重が 1310mg の時の生存日数の推定値は

$$y = \frac{2224}{28040}700 + 40 = \frac{1556800}{28040} + 40 \sim 95.52$$

となります。

2 中心極限定理を使って、平均 1500・標準偏差 100 の母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ に対して、確率 $P[1490 \leq \bar{X} \leq 1530]$ を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス到達目標：エ、オ、カ

【解答例】 中心極限定理によれば、この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(1500, \frac{100^2}{100}\right)$ で近似されますから

$$\begin{aligned} P[1490 \leq \bar{X} \leq 1530] &\approx P[1490 \leq N(1500, 100) \leq 1530] \\ &= P[-10 \leq N(0, 100) \leq 30] \\ &= P[-1 \leq N(0, 1) \leq 3] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 1] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 3] \\ &\approx 0.3413 + 0.4987 \\ &= 0.8400 \end{aligned}$$

となります。

□

3 密度関数が次の関数 $h(x)$ であるような確率変数 X に対して、確率 $P[1 \leq X \leq 2]$ と平均値 $E[X]$ を計算して下さい。

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{3}x + 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：15 点 シラバス到達目標：ア、ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[1 \leq X \leq 2] &= \int_1^2 h(x) dx \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x + 1\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^2 + x\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{6}(4 - 1) + (2 - 1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x^2 dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + x\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{9}x^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_1^3 \\ &= \frac{2}{9} - \frac{1}{9}(27 - 1) + \frac{1}{2}(9 - 1) \\ &= 4 - \frac{24}{9} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

□

4 平均 78.3、分散 9 の正規分布に従う確率変数 W に対して確率 $P[75.0 \leq W]$ を求めて下さい。

配点：15 点

シラバス到達目標：ア、ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned}
 P[75.0 \leq W] &= P[75.0 \leq N(78.3, 9)] \\
 &= P[-3.3 \leq N(0, 9)] \\
 &= P[-1.1 \leq N(0, 1)] \\
 &= 0.5 + P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.1] \\
 &\approx 0.5 + 0.3643 \\
 &= 0.8643
 \end{aligned}$$

□

5 次の関数 $f(x)$ に対してたたみ込み $f * f$ を計算して下さい。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \left(\text{ただし、} (v * w)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-y)w(y)dy \right)$$

配点：10 点

シラバス到達目標：オ

【解答例】

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy = \int_0^2 f(x-y)dy$$

ですが、ここで被積分関数は $0 \leq x-y \leq 2$ すなわち $x-2 \leq y \leq x$ 以外では 0 になってしまうので、この範囲と積分範囲である $[0, 2]$ の重なり具合が問題となります。

【 $x \leq 0$ の場合】 積分区間内では被積分関数は常に 0 なので

$$(f * f)(x) = \int_0^2 f(x-y)dy = 0$$

です。

【 $0 \leq x \leq 2$ の場合】 積分区間 $[0, 2]$ との交わりは $[0, x]$ であり

$$(f * f)(x) = \int_0^x dy = x$$

です。

【 $2 \leq x \leq 4$ の場合】 積分区間との交わりは $[x-2, 2]$ であり、

$$(f * f)(x) = \int_{x-2}^2 dy = 4 - x$$

です。

【 $4 \leq x$ のとき】 積分区間内では被積分関数は常に 0 なので

$$(f * f)(x) = \int_0^2 f(x-y)dy = 0$$

です。

以上から求めるたたみ込みは

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & 4 \leq x \\ 4 - x & 2 \leq x \leq 4 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

となります。

□

6 xy -平面内の長方形 $[1, 2] \times [-1, 1]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立て、曲面 $z = xy^2 + 3x + 2$ で蓋をした立体の体積を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：オ
---------	------------

【解答例】

$$\begin{aligned} \text{(体積)} &= \int_1^2 \left\{ \int_{-1}^1 (xy^2 + 3x + 2) dy \right\} dx \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x}{3} y^3 + (3x + 2)y \right]_{-1}^1 dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \frac{x}{3} (1 + 1) + (3x + 2)(1 + 1) \right\} dx \\ &= 2 \int_1^2 \left(\frac{x}{3} + 3x + 2 \right) dx \\ &= 2 \int_1^2 \left(\frac{10}{3} x + 2 \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{5}{3} x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{10}{3} (4 - 1) + 4(2 - 1) \\ &= 14. \end{aligned}$$

□