1 ある工場で生産している製品の重さは、通常は平均値が 80g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、最近ちょっと重いのではないかとの疑義が生じています（分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします）。正しく生産されているか調べるために、ある日の製品の中から 100 個のサンプルを抽出して重さを測定したところ、平均値が 80.9g でした。この日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。

帰無仮説 H_0：　この日も重さの平均値は 80g である
対立仮説 H_1：　この日の重さの平均値は 80g より重い

とし、有意水準 5 ％で検定して下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ケ

【解答例】　帰無仮説 H_0 が正しい、つまり母平均を 80 と仮定すれば、この日の製品の中から取り出した大きさ 100 の標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(80, \frac{5^2}{100}\right)$ に従います。この日の製品が平常と比べて重いかどうかが問題になっていますので、有意水準 5 ％で右片側棄却域を設定し、仮説検定します。

まずは棄却域を求めるため、この $\overline{X}$ に対して

$$0.05 = P\left[80 + d \leq \overline{X}\right]$$

となる $d > 0$ を求めることにします。$\overline{X}$ は $N\left(80, \frac{1}{4}\right)$ に従いましたから

$$\begin{aligned} 0.05 &= P\left[d \leq \overline{X} - 80\right] \\ &= P\left[\frac{d}{\frac{1}{2}} \leq N(0,1)\right] \\ &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq 2d\right] \\ 0.45 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq 2d\right] \end{aligned}$$

となり、正規分布表から $2d \sim 1.645$、つまり $d \sim 0.8225$ が分かります。これは

$$0.05 \sim P\left[80.8225 \leq \overline{X}\right] = P\left[\overline{X} \in [80.8225, \infty)\right]$$

を意味しますので、有意水準 5 ％での右片側棄却域は区間 $[80.8225, \infty)$ となります。

今回のサンプル値 80.9 はこの片側棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、この日は平常よりも重かったと言えます。

2 分散が 3.87^2 である母集団から大きさ 50 のサンプルを取って調べたところサンプルの平均値が 169.6 でした。
この時に母平均 m の信頼度 95 パーセントの信頼区間を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ク

【解答例】　この母集団からとった大きさ 50 の標本平均を $\bar{X}$ とします。サイズが大きいので中心極限定理が適用出来、$\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3.87^2}{50}\right)$ で近似されます。そこでまず

$$P[|\bar{X}-m| \le d] = 0.95$$

となる様な $d>0$ を求めます。変形すれば

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx P\left[\left|N\left(m, \frac{3.87^2}{50}\right) - m\right| \le d\right] \\ &= P\left[\left|\frac{N\left(0, \frac{3.87^2}{50}\right)}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}}\right| \le \frac{d}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}}\right] \\ &= P\left[|N(0,1)| \le \frac{d\sqrt{50}}{3.87}\right] \\ 0.475 &\approx P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d\sqrt{50}}{3.87}\right] \end{aligned}$$

となりますが、標準正規分布表に依れば、

$$\frac{d\sqrt{50}}{3.87} = 1.96, \quad d = \frac{1.96 \times 3.87}{5\sqrt{2}} \sim 1.07$$

であれば良い事が分かります。従って $P[|\bar{X}-m| \le 1.07] \approx 0.95$ が分かりました。

以上から今回のサンプル値 169.6 について、95 パーセントの信頼度で

$$|169.6 - m| \le 1.07 \quad \text{即ち} \quad 169.6 - 1.07 \le m \le 169.6 + 1.07$$

であり、従って求める信頼区間は $[168.53, 170.67]$ です。　□

3 次の各文章が正しいかどうか、〇/×のみで答えて下さい。

(1) 正規母集団における母平均の仮説検定において、他の条件が同じであれば、有意水準を 5 ％から 10 ％に上げると対応した棄却域は狭くなる。
(2) 正規母集団における母平均の仮説検定において、他の条件が同じであれば、有意水準を 5 ％から 10 ％に上げると対応した棄却域は広くなる。
(3) 大きさ 10 の標本平均の分散は母集団の分散より大きい。
(4) 大きさ 10 の標本平均の分散は母集団の分散より小さい。
(5) 大きさ 100 の標本分散の平均は母集団の分散より大きい。
(6) 大きさ 100 の標本分散の平均は母集団の分散より小さい。
(7) 標準正規分布の自乗は正規分布に従う。
(8) 正規分布の和は必ず正規分布に従う。

配点：(1)(2)、(3)(4)、(5)(6) 各 4 点、(7)、(8) 各 4 点	シラバス到達目標：オ、キ

【解答例】　(1) ×、 (2) 〇、(3) ×、 (4) 〇、(5) ×、 (6) 〇、(7) ×、 (8) ×。

4　２次元の確率変数 (X, Y) があって、X, Y は独立であり、X は標準正規分布 $N(0,1)$、Y は正規分布 $N(1,3)$ に従っているとします。

(1) $X + Y$ はどんな分布に従いますか？

(2) 正規分布表を利用して確率 $P[X + Y \geq 2.3]$ を求めて下さい。

配点：(1)(2)15 点	シラバス到達目標：エ、オ

【解答例】　(1) 独立な正規分布の和はまた正規分布になり、平均・分散ともに和となりますから、$X + Y$ は $N(1,4)$ に従います。

(2)

$$\begin{aligned} P[X + Y \geq 2.3] &= P[N(1,4) \geq 2.3] \\ &= P[N(0,4) \geq 1.3] \\ &= P\left[N(0,1) \geq \frac{1.3}{2}\right] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0,1) \leq 0.65] \\ &\approx 0.5 - 0.2422 \\ &= 0.2578 \end{aligned}$$

5　次の２次元のデータ (A, B) に関して以下の問いに答えて下さい。ただし、答えの数値は一切の近似をせずに（割り切れないのであれば）分数の形で記述して下さい。

A	3	2	7	1	1	2	1	6	3	0	7	3
B	5	8	6	5	8	8	7	11	7	4	7	8

(1) 平均値 $E[A], E[B]$ と A の分散 $Var[A]$ を求めて下さい。

(2) A, B の共分散 $Cov[A, B]$ を求めて下さい。

配点：(1)20 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】　(1)

$$E[A] = \frac{3+2+7+1+1+2+1+6+3+0+7+3}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

$$E[B] = \frac{5+8+6+5+8+8+7+11+7+4+7+8}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

$$\begin{aligned} Var[A] &= \frac{0^2+(-1)^2+4^2+(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2+3^2+0^2+(-3)^2+4^2+0^2}{12} \\ &= \frac{1+16+4+4+1+4+9+9+16}{12} \\ &= \frac{64}{12} \\ &= \frac{16}{3} \quad (\approx 5.33) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Cov[A, B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\ &= \frac{15+16+42+5+8+16+7+66+21+0+49+24}{12} - 21 \\ &= \frac{269}{12} - 21 \\ &= \frac{17}{12} \quad (\approx 1.41667) \end{aligned}$$

6 正規分布 $N(10, 2^2)$ に従う母集団からとった大きさ 25 の標本平均を $\bar{X}$ とするとき確率 $P[9.6 \leq \bar{X} \leq 10.4]$ を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ、カ

【解答例】

$$
\begin{aligned}
P[9.6 < \bar{X} < 10.4] &= P\left[9.6 < N\left(10, \frac{2^2}{25}\right) < 10.4\right] \\
&= P\left[-\frac{0.4}{\frac{2}{5}} < \frac{N\left(0, \frac{2^2}{25}\right)}{\frac{2}{5}} < \frac{0.4}{\frac{2}{5}}\right] \\
&= 2P[0 \leq N(0,1) \leq 1] \\
&\approx 2 \cdot 0.3413 \\
&\approx 0.6826
\end{aligned}
$$

7 分布密度関数が次の $f(x)$：

$$
f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

で与えられている確率変数 X に対して、確率 $P[0.5 \leq X \leq 2]$ を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$
\begin{aligned}
P[0.5 \leq X \leq 2] &= \int_{0.5}^{2} f(x)dx \\
&= \int_{0.5}^{1} 2x\,dx \\
&= [x^2]_{0.5}^{1} \\
&= 1 - 0.25 \\
&= 0.75
\end{aligned}
$$