1 次の２次元のデータ (A, B) について以下の問いに答えて下さい。

A	3	2	7	1	1	2	1	6	3	0	7	3
B	5	8	6	5	8	8	7	11	7	4	7	8

(1) 平均値 $E[A], E[B]$ と分散 $Var[A]$ を求めて下さい。

(2) B の A への回帰直線の方程式が

$$y - E[B] = \frac{Cov[A,B]}{Var[A]}(x - E[A])$$

となることを使って A が 5 である時の B の値を概算して下さい。

配点：(1) 30 点、(2) 10 点	シラバス到達目標：ア、イ、オ

【解答例】　(1)

$$E[A] = \frac{3+2+7+1+1+2+1+6+3+0+7+3}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

$$E[B] = \frac{5+8+6+5+8+8+7+11+7+4+7+8}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

$$\begin{aligned}
&Var[A] \\
&= \frac{0^2+(-1)^2+4^2+(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2+3^2+0^2+(-3)^2+4^2+0^2}{12} \\
&= \frac{1+16+4+4+1+4+9+9+16}{12} \\
&= \frac{64}{12} \\
&= \frac{16}{3} \\
&\sim 5.33
\end{aligned}$$

(2) 共分散を計算しておきます。

$$\begin{aligned}
Cov[A,B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\
&= \frac{15+16+42+5+8+16+7+66+21+0+49+24}{12} - 21 \\
&= \frac{269}{12} - 21 \\
&= \frac{17}{12}
\end{aligned}$$

すると題意より回帰直線の方程式は

$$y - 7 = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{64}{12}}(x - 3)$$

となりますから、$x = 5$ のとき

$$y = \frac{17}{64} \cdot 2 + 7 \sim 7.53$$

を得ます。以上から得点が 5 点の時の安打数は概算で 7.5 本と考えられます。　□

2 密度関数が次の $h(x)$ であるような確率変数 A について、確率 $P[0.4 \le A \le 1.2]$ と期待値 $E[A]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：20 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[0.4 \le A \le 1.2] &= \int_{0.4}^{1.2} h(x)dx \\ &= \int_{0.4}^{1} 2x dx \\ &= [x^2]_{0.4}^{1} \\ &= 1 - 0.16 \\ &= 0.84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \\ &= E[A] \end{aligned}$$

□

3 確率変数 R が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[R \le w] = 0.209$ を満たす w の値を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】

$$\begin{aligned} 0.209 &= P[R \le w] \\ &= P[N(5,4) \le w] \\ &= P\left[N(0,1) \le \frac{w-5}{2}\right] \end{aligned}$$

ですが、この確率が 0.5 未満であるため、$\frac{w-5}{2}$ は負の数であり、

$$\begin{aligned} &= P\left[\frac{5-w}{2} \le N(0,1)\right] \\ &= 0.5 - P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{5-w}{2}\right] \\ 0.291 &= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{5-w}{2}\right] \end{aligned}$$

となって、正規分布表より

$$\frac{5-w}{2} \sim 0.81 \qquad w \sim 3.38$$

が得られます。□

4 (1) 区間 $[0,1], [-1,2]$ 上の一様分布の密度関数 $f(x), g(x)$ をそれぞれ求めてください。

(2) 上で求めた $f(x), g(x)$ に対してたたみ込み $f*g$ を計算して下さい。ただし、たたみ込みは

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

で定義されます。

配点：(1) 10 点、(2) 10 点	シラバス到達目標：オ

【解答例】　(1)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) たたみ込みの定義式に於いて、まず被積分関数の第２因子を具体化すると

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-1}^{2} f(x-y)\frac{1}{3}dy\end{aligned}$$

となります。次に第１因子を具体化しますが、$f(x-y)$ は $0 \le x-y \le 1$、つまり $x-1 \le y \le x$ に於いてのみ０でないのでこの区間 $[x-1, x]$ と積分区間の $[-1,2]$ の重なり具合が問題になります。

従ってたたみ込みは場合分けによって

$$(f*g)(x) = \begin{cases} 0 & 3 \le x \\ \int_{x-1}^{2} \frac{1}{3}dy & 2 \le x \le 3 \\ \int_{x-1}^{x} \frac{1}{3}dy & 0 \le x \le 2 \\ \int_{-1}^{x} \frac{1}{3}dy & -1 \le x \le 0 \\ 0 & x \le -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 3 \le x \\ \frac{1}{3}(3-x) & 2 \le x \le 3 \\ \frac{1}{3} & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{3}(x+1) & -1 \le x \le 0 \\ 0 & x \le -1 \end{cases}$$

となります。 □

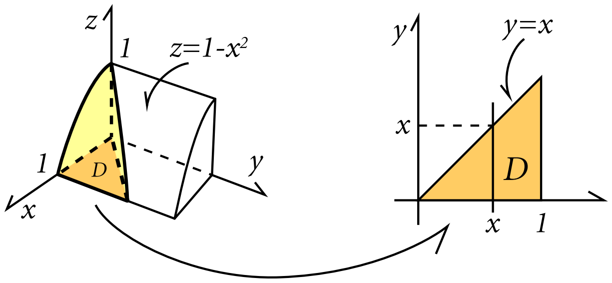
5 xy-平面内の領域 D：

$$D\ :\ \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

を床とし、この領域の周囲に垂直な壁を立て、曲面 $z = h(x, y) = 1 - x^2$ で蓋をして得られる立体の体積 $V_D(h)$ を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：オ

【解答例】



$$\begin{aligned} V_D(h) &= \iint_D (1 - x^2)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^x (1 - x^2)dydx \\ &= \int_0^1 x(1 - x^2)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

が分かります。　□