

1 ある日のプロ野球公式戦は全 5 試合が行われ、10 チームの得点と安打数は以下の通りでした：

得点 X	5	1	9	6	1	10	1	3	0	3
安打数 Y	11	4	10	12	6	15	5	4	6	3

得点データを X 、安打数データを Y として以下の問いに答えてください。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい (近似はしないこと)。
- (2) X, Y の共分散を求めて下さい (近似はしないこと)。
- (3) Y の X への回帰直線：

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

を利用して、得点が 4 点の場合の安打数を推定して下さい。

配点：(1)30 点、(2)(3)10 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1) まず平均値と分散は

$$E[X] = \frac{5 + 1 + 9 + \cdots + 3}{10} = \frac{39}{10} = 3.9$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= \frac{5^2 + 1^2 + 9^2 + \cdots + 3^2}{10} - \left(\frac{39}{10}\right)^2 \\ &= \frac{25 + 1 + 81 + 36 + 1 + 100 + 1 + 9 + 9}{10} - \frac{39^2}{100} \\ &= \frac{2630 - 1521}{100} \\ &= \frac{1109}{100} \\ &= 11.09 \end{aligned}$$

$$E[Y] = \frac{11 + 4 + 10 + \cdots + 3}{10} = \frac{76}{10} = 7.6$$

です。

(2) 共分散は

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{55 + 4 + 90 + 72 + 6 + 150 + 5 + 12 + 9}{10} - \frac{39}{10} \cdot \frac{76}{10} \\ &= \frac{4030 - 2964}{100} \\ &= \frac{1066}{100} \\ &= 10.66 \end{aligned}$$

になります。

(3) 得点が 4 点のとき、

$$\begin{aligned} y - E[Y] &= \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(4 - E[X]) \\ y - 7.6 &= \frac{\frac{1066}{100}}{\frac{1109}{100}}(4 - 3.9) \\ y &= \frac{1066}{1109} \cdot \frac{1}{10} + 7.6 \\ &\approx 0.0961 + 7.6 \\ &\approx 7.7 \end{aligned}$$

により安打数は概算で 7.7 本です。

□

(2)(3)合わせて 10点
計算ミス -3点
定義ミスなど -5点

ただし、(1)(2)が間違っていたことによる
(3)の間違いは減点しない。
(3)単独での計算ミスは-2点とする。

平均値・分散それぞれにつき10点

計算ミス -3点
定義ミス -5点
ケアレスミス -2点

- 2 (1) 確率変数 X の密度関数が $h(x)$ であるとはどういうことか述べてください。
 (2) 密度関数が

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[0 \leq X \leq 1]$ を計算して下さい。

配点：(1)5 点、(2)10 点 | シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1) 任意の $a < b$ に対して

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b h(x) dx$$

となるとき、関数 $h(x)$ は確率変数 X の密度関数であると言えます。

少しそれっぽいことが書いてある 1~2点
 大体良いもの 3~4点

(2)

$$\begin{aligned} P[0 \leq X \leq 1] &= \int_0^1 \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} [\tan^{-1} x]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

計算ミス -3点
 重大な積分のミス -5点
 少しのみ 2~3点

□

- 3 平均 50、標準偏差 3 の正規分布に従う確率変数 W に対して、確率 $P[55 \leq W \leq 57]$ を求めて下さい。

配点：10 点 | シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[55 \leq W \leq 57] &= P[5 \leq W - 50 \leq 7] \\ &= P\left[\frac{5}{3} \leq \frac{W - 50}{3} \leq \frac{7}{3}\right] \\ &= P\left[\frac{5}{3} \leq N(0, 1) \leq \frac{7}{3}\right] \end{aligned}$$

分散のミス、標準偏差で割っていないなど -5点

計算ミス -3点

$$\begin{aligned} &= P[1.667 \leq N(0, 1) \leq 2.333] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 2.333] - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.667] \\ &\approx 0.4901 - 0.452 \end{aligned}$$

差でなく和になっているもの -5点

$$\approx 0.0381$$

□

4 中心極限定理を使って、平均 490・標準偏差 50 の母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ に対して、確率 $P[497 \leq \bar{X} \leq 508]$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：エ、オ、カ

【解答例】 中心極限定理によれば、標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(490, \frac{50^2}{100}\right)$ で近似されます。従って

$$\begin{aligned} P[497 \leq \bar{X} \leq 508] &\approx P\left[497 \leq N\left(490, \frac{50^2}{100}\right) \leq 508\right] \\ &= P\left[\frac{7}{5} \leq N(0, 1) \leq \frac{18}{5}\right] \\ &= P[1.4 \leq N(0, 1) \leq 3.6] \end{aligned}$$

分散・標準偏差のミス -5点
正規分布近似のミス -5点

3.6の部分が処理できなかったもの -1点

$$\begin{aligned} &\approx 0.5 - 0.4192 \\ &= 0.0808 \end{aligned}$$

です。

□

計算ミス -3点
重大なミスが多いもの -7点

5 次の2つの関数のたたみ込み $(f * g)(x)$ を計算して下さい：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

配点：10 点 シラバス到達目標：オ

【解答例】 たたみ込みの定義式に於いて、まず被積分関数の第2因子を具体化すると

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-1}^2 f(x-y)\frac{1}{3}dy \end{aligned}$$

となります。

少しのみ 2～3点

次に第1因子を具体化しますが、 $f(x-y)$ は $0 \leq x-y \leq 1$ 、つまり $x-1 \leq y \leq x$ に於いてのみ0でないのでこの区間 $[x-1, x]$ と積分区間の $[-1, 2]$ の重なり具合が問題になります。

単純な計算ミス -3点
場合分けのミスなど重大なミス -5点

従ってたたみ込みは場合分けによって

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & 3 \leq x \\ \int_{x-1}^2 \frac{1}{3} dy & 2 \leq x \leq 3 \\ \int_{x-1}^x \frac{1}{3} dy & 0 \leq x \leq 2 \\ \int_{-1}^x \frac{1}{3} dy & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 3 \leq x \\ \frac{1}{3}(3-x) & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(x+1) & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1 \end{cases}$$

となります。

□

6 xy -平面内の長方形 $[0, 3] \times [0, 2]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立て、曲面 $z = 2xy^2 + y$ で蓋をした立体の体積を求めて下さい。

配点：15 点

シラバス到達目標：オ

【解答例】 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left\{ \int_0^3 (2xy^2 + y) dx \right\} dy \\ &= \int_0^2 [x^2 y^2 + xy]_0^3 dy \\ &= \int_0^2 (9y^2 + 3y) dy \\ &= \left[3y^3 + \frac{3}{2}y^2 \right]_0^2 \\ &= 24 + 6 \\ &= 30 \end{aligned}$$

計算ミス -5点
重大なミス・ミスが多い -10点
少しのみ 2～3点

となります。

□