1 ある工場で直径 12mm のスチールボールを生産していますが、疑義が生じています。

そこで一つの製品ロット（約 1 万個）の中から 80 個を無作為に取り出して測定したところ、直径の平均値が 12.04mm、分散が $(0.12\mathrm{mm})^2$ でした。このロットのスチールボールの直径の平均値は規格通りの 12mm であると言えるでしょうか。

帰無仮説 H_0：『直径の平均値は 12mm である』
対立仮説 H_1：『直径の平均値は 12mm でない』

として有意水準 5 ％で仮説検定して下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ケ

【解答例】　帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。この場合サンプル数が大きいので母分散は 0.12^2 で代用し、更に中心極限定理によれば、この母集団 $N(12.12^2)$ から取った大きさ 80 の標本平均 $\overline{X}$ は $N\left(120, \frac{0.12^2}{80}\right)$ で近似されます。

$0.05 = P[|\overline{X} - 12| \geq d]$ となる様な $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned} 0.05 &\approx P\left[\left|N\left(12, \frac{0.12^2}{80}\right) - 12\right| \geq d\right] \\ &= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right] \\ &= 2P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right] \\ 0.025 &\approx 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right] \\ 0.475 &\approx P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}}\right] \end{aligned}$$

によれば正規分布表を参照して $\frac{d}{\frac{0.12}{\sqrt{80}}} \approx 1.96$、つまり、$d \approx 0.026$ が分かります。

これは

$$0.05 \approx P[|\overline{X} - 12| \geq 0.026]$$

を意味し、棄却域は $(-\infty, 11.974] \cup [12.026, \infty)$ です。今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っており、帰無仮説 H_0 は棄却され平均値は 12mm ではないと判断されます。 □

2 ある工場で生産しているケース入洗剤の内容量は、従来の測定によって母分散が $(3.5\mathrm{g})^2$ の正規分布に従う事が知られています。

　ある単位生産時間の製品の中から 25 個を無作為に抽出して測定したところ、平均値が 202.8g でした。内容量の母平均 m に対して信頼度 95 ％の信頼区間を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ク

【解答例】　この母集団からとった大きさ 25 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3.5^2}{25}\right)$ に従います。

　まず

$$0.95 = P[|\bar{X} - m| \leq d]$$

となる正数 d を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &= P\left[\left|N\left(m, \frac{3.5^2}{25}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0,1)| \leq \frac{d}{\frac{3.5}{5}}\right] \\ &= 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.7}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.7}\right] \end{aligned}$$

ですから、標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{0.7} \sim 1.96, \quad \text{従って} \quad d \sim 1.372$$

が得られます。従って

$$P[|\bar{X} - m| \leq 1.372] \sim 0.95$$

ですから、今回のサンプル平均値が 202.8 だった事から、信頼度 95 ％で

$$|202.8 - m| \leq 1.372, \quad \text{従って} \quad 201.428 \leq m \leq 204.172$$

が成立しており、求める信頼区間は $[201.428, 204.172]$ になります。　□

3 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

　(1) X の分散が 1 であるとき、$-2X$ の分散は -4 である。
　(2) 正規分布に従う母集団からとった標本平均は正規分布に従う。
　(3) 正規分布に従う母集団からとった大きさ 5 の標本分散は自由度 5 のカイ自乗分布の定数倍に従う。
　(4) 標本分散の期待値は母集団の分散に等しい（期待値、分散は存在するものとします）。

配点：各 3 点	シラバス到達目標：カ、キ

【解答例】　(1) ×、 (2) ○　、(3) ×、 (4) ×。　□

4 確率変数 R が正規分布 $N(1, 4)$ に従うとき、条件 $P[R \leq w] = 0.858$ を満たす w の値を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】　R を標準化すると

$$
\begin{aligned}
0.858 &= P[R \leq w] \\
&= P[R-1 \leq w-1] \\
&= P\left[\frac{R-1}{2} \leq \frac{w-1}{2}\right] \\
&= P\left[N(0,1) \leq \frac{w-1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

であり、これが 0.5 以上であることから $\frac{w-1}{2}$ は正であって

$$
\begin{aligned}
0.858 &= 0.5 + P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{w-1}{2}\right] \\
0.358 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{w-1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

が分かります。標準正規分布表に依れば、$\frac{w-1}{2} \approx 1.07$ ですからここから w を求めれば $w \approx 3.14$ が得られます。　□

5 2 次元の確率変数 (X, Y) があり、X, Y は独立であって X は $N(0, 1)$、Y は $N(3, 5)$ に従っています。

(1) このとき $2X + Y$ はどんな分布に従いますか。
(2) 確率 $P[4 \leq 2X + Y]$ を計算して下さい。

配点：5 点	シラバス到達目標：エ、オ

【解答例】　(1) $2X$ は $N(0, 4)$ に従い、$2X$ と Y も独立ですから平均・分散共に和となり、$2X + Y$ は $N(3, 9)$ に従います。

(2)

$$
\begin{aligned}
P[4 \leq 2X + Y] &= P[4 \leq N(3,9)] \\
&= P[1 \leq N(0,9)] \\
&= P\left[\frac{1}{3} \leq N(0,1)\right] \\
&= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq 0.33\right] \\
&\approx 0.5 - 0.1293 \\
&= 0.3707
\end{aligned}
$$

□

6 ある日のプロ野球公式戦は全 5 試合が行われ、10 チームの得点と安打数は以下の通りでした：

X：得点	5	1	9	6	1	10	1	3	0	3
Y：安打数	11	4	10	12	6	15	5	4	6	3

得点データ（これを X とします）の平均値・分散、安打数データ（これを Y とします）の平均値・分散を求め、X と Y の共分散を求めて下さい。

配点：35 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】　まず X の平均値と分散は

$$E[X] = \frac{5+1+9+\cdots+3}{10} = \frac{39}{10} = 3.9$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= \frac{5^2+1^2+9^2+\cdots+3^2}{10} - \left(\frac{39}{10}\right)^2 \\ &= \frac{25+1+81+36+1+100+1+9+9}{10} - \frac{39^2}{100} \\ &= \frac{2630-1521}{100} \\ &= \frac{1109}{100} \\ &= 11.09 \end{aligned}$$

です。

次に Y の平均値と分散は

$$E[Y] = \frac{11+4+10+\cdots+3}{10} = \frac{76}{10} = 7.6$$

$$\begin{aligned} Var[Y] &= \frac{11^2+4^2+10^2+\cdots+3^2}{10} - \left(\frac{76}{10}\right)^2 \\ &= \frac{121+16+100+144+36+225+25+16+36+9}{10} - \frac{76^2}{100} \\ &= \frac{7280-5776}{100} \\ &= 15.04 \end{aligned}$$

です。

共分散は

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{55+4+90+72+6+150+5+12+9}{10} - \frac{39}{10}\cdot\frac{76}{10} \\ &= \frac{4030-2964}{100} \\ &= \frac{1066}{100} \\ &= 10.66 \end{aligned}$$

になります。

□

7 $N(5.02, 3.5^2)$ に従う正規母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\overline{X}$ に対して確率 $P[4.53 \le \overline{X}]$ を求めて下さい。

配点：8 点	シラバス到達目標：エ、カ、キ

【解答例】　標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(5.02, \frac{3.5^2}{100}\right)$ に従うので

$$\begin{aligned} P[4.53 \le \overline{X}] &= P[4.53 \le N(5.02, 0.35^2)] \\ &= P[-0.49 \le N(0, 0.35^2)] \\ &= P\left[-\frac{0.49}{0.35} \le N(0,1)\right] \\ &= P[-1.4 \le N(0,1)] \\ &= 0.5 + N[0 \le N(0,1) \le 1.4] \\ &\approx 0.5 + 0.4192 \\ &= 0.9192 \end{aligned}$$

です。　□

8 分布密度関数が次の $f(x)$：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x+1)(2-x) & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられている確率変数 X に対して、確率 $P[-2 \le X \le 0]$ を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[-2 \le X \le 0] &= \int_{-2}^{0} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{2}{9}(x+1)(2-x)dx \\ &= \frac{2}{9}\int_{-1}^{0} (-x^2+x+2)dx \\ &= \frac{2}{9}\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{2}{9}\left\{-\frac{1}{3}(1) + \frac{1}{2}(-1) + 2 \cdot 1\right\} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{-2-3+12}{6} \\ &= \frac{7}{27} \end{aligned}$$

□