問題 1 次の２次元のデータ (A, B) について以下の問いに答えて下さい。

A	1	2	3	4	4	5	5	6	6	7
B	4	5	6	5	6	8	7	10	11	10

(1) 平均値 $E[A], E[B]$ と分散 $Var[A]$ を求めて下さい。

(2) B の A への回帰直線の方程式が

$$y - E[B] = \frac{Cov[A, B]}{Var[A]}(x - E[A])$$

となることを使って A が５である時の B の値を概算して下さい。

配点：(1)15 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ア、イ、オ

【解答例】　(1)

$$E[A] = \frac{1 + \cdots + 7}{10} = 4.3$$
$$E[B] = \frac{4 + \cdots + 10}{10} = 7.2$$
$$\begin{aligned} Var[A] &= E[A^2] - E[A]^2 \\ &= \frac{1^2 + \cdots + 7^2}{10} - 4.3^2 \\ &= 21.7 - 18.49 \\ &= 3.21 \end{aligned}$$

(2) 共分散は

$$\begin{aligned} Cov[A, B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\ &= \frac{4 + 10 + \cdots + 70}{10} - 4.3 \cdot 7.2 \\ &= 34.7 - 30.96 \\ &= 3.74 \end{aligned}$$

ですから、回帰直線は

$$y - 7.2 = \frac{3.74}{3.21}(x - 4.3)$$

であって、$A = 5$ のとき、

$$y = \frac{3.74}{3.21}(5 - 4.3) + 7.2 \approx 8.0156$$

となります。これが求める概算値です。

□

問題 2 (1) 区間 $[4, 10]$ 上の一様分布に従う確率変数 X の密度関数を求めて下さい。
(2) 確率 $P[5 \le X \le 8]$ と分散 $Var[X]$ を求めて下さい。

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】 (1) 密度関数を $h(x)$ とすれば

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 4 \le x \le 10 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

です。
(2)

$$P[5 \le X \le 8] = \int_5^8 h(x)dx = \frac{3}{6} = 0.5$$

平均値は中心値である 7 ですから、

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X-7)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-7)^2 h(x)dx \\ &= \int_4^{10} \frac{1}{6}(x-7)^2 dx \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}(x-7)^3\right]_4^{10} \\ &= \frac{54}{18} \\ &= 3 \end{aligned}$$

です。 □

問題 3 確率変数 R が平均 20、分散 4^2 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して $P[16 \le R \le 30]$ を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[16 \le R \le 30] &= P[16 \le N(20, 4^2) \le 30] \\ &= P[-4 \le N(0, 4^2) \le 10] \\ &= P\left[-1 \le N(0,1) \le \frac{10}{4}\right] \\ &= P[0 \le N(0,1) \le 1] + P[0 \le N(0,1) \le 2.5] \\ &\approx 0.3413 + 0.4938 \\ &= 0.8351 \end{aligned}$$

□

問題 4 次で定義された $f(x), g(x)$ に対してたたみ込み $f * g$ を計算して下さい。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & 0 \le x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ただし、たたみ込みは

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

で定義されます。

配点：15 点	シラバス到達目標：オ

【解答例】

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{0}^{\infty} f(x-y)\mathrm{e}^{-y}dy\end{aligned}$$

ですが、被積分関数が 0 でない範囲は $0 \le x - y \le 1$、すなわち

$$x - 1 \le y \le x$$

ですから、この範囲と積分範囲の重複の加減によって積分値は変わって来ます。

$x \le 0$ のときは、積分区間全体において被積分関数は 0 ですから、

$$(f * g)(x) = 0 \quad x \le 0$$

です。

$0 \le x \le 1$ のときは、

$$(f * g)(x) = \int_{0}^{x} 1 \cdot \mathrm{e}^{-y}dy = [-\mathrm{e}^{-y}]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

となります。

また、$1 \le x$ のときは

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^{x} \mathrm{e}^{-y}dy = [-\mathrm{e}^{-y}]_{x-1}^{x} = \mathrm{e}^{-(x-1)} - \mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x}$$

です。

以上から、たたみ込みは以下の通り：

$$(f * g)(x) = \begin{cases} (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x} & 1 \le x \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \le 0. \end{cases}$$

□

問題 5　２変数関数 $h(x,y)$ が２次元の確率変数 $\mathbb{X}=(X,Y)$ の密度関数であるとはどう云うことか簡潔に説明して下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ、オ

【解答例】　任意の長方形 $J\times K$ に対して $P[\mathbb{X}\in J\times K]$ が、長方形 $J\times K$ を床にし、その周囲に垂直な壁を立てて曲面 $z=h(x,y)$ で屋根をつけた立体の体積に一致するとき、$h(x,y)$ は $\mathbb{X}$ の密度関数と呼ばれます。 □

問題 6　平均 5.02、分散 3.5^2 の母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\overline{X}$ に対して確率 $P[4.53\leq\overline{X}]$ を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：エ、キ

【解答例】　中心極限定理によれば、$\overline{X}$ は正規分布 $N\left(5.02,\frac{3.5^2}{100}\right)$ で近似されます。従って

$$\begin{aligned}
P[4.53\leq\overline{X}] &\approx P\left[4.53\leq N\left(5.02,\frac{3.5^2}{100}\right)\right]\\
&= P\left[-0.49\leq N(0,0.35^2)\right]\\
&= P\left[-\frac{0.49}{0.35}\leq N(0,1)\right]\\
&= 0.5+P[0\leq N(0,1)\leq 1.4]\\
&\approx 0.5+0.4192\\
&= 0.9192
\end{aligned}$$

です。 □