

問題 1 あるガソリンスタンドで、トラック用燃料の売上传票の中から無作為に 50 枚の伝票を取り出したところ、平均売上量は 244 リットルで、標準偏差は 10.6 リットルでした。信頼度 95 % で平均売上量の信頼区間を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス到達目標：ク

【解答例】 大きなサイズのサンプルをとったので、サンプルの分散 10.6^2 を母分散の代用とします。

また母平均を m と置けば、中心極限定理により、この母集団からとった大きさ 50 の標本平均 $\bar{X}$ は、正規分布 $N\left(m, \frac{10.6^2}{50}\right)$ で近似されます。

まず

$$P\left[|\bar{X} - m| \leq d\right] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx P\left[\left|N\left(m, \frac{10.6^2}{50}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[\left|N\left(0, \frac{10.6^2}{50}\right)\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{10.6}{\sqrt{50}}}\right] \\ &= 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{10.6}{\sqrt{50}}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{10.6}{\sqrt{50}}}\right] \end{aligned}$$

標準正規分布表によれば、

$$\frac{d}{\frac{10.6}{\sqrt{50}}} \approx 1.96 \quad \text{従って} \quad d \approx 2.95$$

が分かりますから、

$$P\left[|\bar{X} - m| \leq 2.95\right] \approx 0.95$$

です。

従って、今回のサンプル平均 244 について、信頼度 95 % で

$$|244 - m| \leq 2.95$$

$$244 - 2.95 \leq m \leq 244 + 2.95$$

$$241.05 \leq m \leq 246.95$$

が成り立ちますから求める信頼区間は $[241.05, 246.95]$ です。

□

問題 2 ある教育学者は日本の高校生の平均知能指数は高々 110 であると主張しています。そこで 150 人の高校生を無作為に選んで調査したところ、知能指数の平均値は 111.2 であり、標準偏差は 7.2 でした。この結果からこの教育学者の主張（平均知能指数が 110 以下であること）を認めることは出来るでしょうか？

帰無仮説 H_0 : 『平均知能指数は 110 である』

対立仮説 H_1 : 『平均知能指数は 110 よりも高い』

として有意水準 5 % で仮説検定して下さい。ただし、 $\sqrt{150} \approx 12.25$ として下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：ケ
---------	------------

【解答例】 帰無仮説が正しいと仮定します。

大きなサイズのサンプルをとっているので、母集団の分散はサンプルの分散 7.2^2 で代用することにします。

するとこの母集団からとった大きさ 150 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(110, \frac{7.2^2}{150}\right)$ で近似されます（中心極限定理）。

まず

$$P[110 + d \leq \bar{X}] = 0.05$$

となる $d > 0$ を計算して右片側棄却域を求めます。

$$\begin{aligned} 0.05 &\approx P\left[110 + d \leq N\left(110, \frac{7.2^2}{150}\right)\right] \\ &= P\left[d \leq N\left(0, \frac{7.2^2}{150}\right)\right] \\ 0.45 &= P\left[0 \leq N\left(0, \frac{7.2^2}{150}\right) \leq d\right] \\ &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{7.2}{\sqrt{150}}}\right] \end{aligned}$$

標準正規分布表によれば、

$$\frac{d}{\frac{7.2}{\sqrt{150}}} \approx 1.645 \quad \text{従って} \quad d \approx \frac{1.645 \cdot 7.2}{12.25} \approx 0.97$$

が分かりますから、求める棄却域は $[110.97, +\infty)$ です。

今回のサンプル平均 111.2 は棄却域に入っていますから、帰無仮説 H_0 は棄却され、対立仮説 H_1 が採択され、日本の高校生の平均知能指数は 110 よりも高いであろうと結論されますから、この教育学者の主張は認められません。□

問題 3 あるクラスの 10 名の数学と英語の試験結果は次表の通りでした：

学生番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学	52	58	63	55	88	60	85	60	55	70
英語	68	73	70	65	85	59	92	78	60	75

- (1) この 10 人の数学の平均点、英語の平均点を求めて下さい。
 (2) この 10 人の数学の得点と英語の得点の共分散を求めて下さい。

配点：(1)20 点、(2)5 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$(\text{数学の平均点}) = \frac{52 + 58 + \cdots + 70}{10} = 64.6$$

$$(\text{英語の平均点}) = \frac{68 + 73 + \cdots + 75}{10} = 72.5$$

(2)

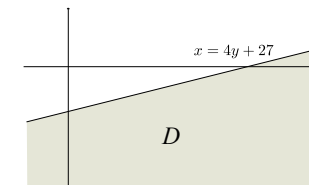
$$(\text{共分散}) = \frac{52 \cdot 68 + 58 \cdot 73 + \cdots + 70 \cdot 75}{10} - 64.6 \cdot 72.5 = 99$$

問題 4 2次元の確率変数 (X, Y) は X, Y が独立であって、 X は正規分布 $N(20, 9)$ に、 Y は正規分布 $N(-1, 1)$ に従っています。

このとき図の領域 D に対して

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow x - 4y > 27$$

となることに注意して $P[(X, Y) \in D]$ を求めて下さい。



配点：10 点 シラバス到達目標：エ、オ

【解答例】

$$P[(X, Y) \in D] = P[X - 4Y > 27]$$

に注意します。

$X - 4Y$ は正規分布 $N(24, 25)$ に従いますから、

$$\begin{aligned} P[27 < X - 4Y] &= P[27 < N(24, 25)] \\ &= P[3 < N(0, 25)] \\ &= P\left[\frac{3}{5} < N(0, 1)\right] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 0.6] \\ &\approx 0.5 - 0.2257 \\ &= 0.2743 \end{aligned}$$

です。

□

問題 5 次の文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。ただし、文中に出てくる期待値・分散等は存在するものとします。

- (1) 標本平均の期待値は、母集団の期待値といつも等しい。
- (2) 標本不偏分散の期待値は、母集団の分散といつも等しい。
- (3) 標本サイズが大きくなれば、標本平均の分散も大きくなる。

配点：各 5 点	シラバス到達目標：カ、キ
----------	--------------

【解答例】 (1) ○、(2) ○、(3) ×。

問題 6 密度関数が次の $h(x)$ であるような確率変数 X に対して、確率 $P[1 \leq X \leq 2]$ と期待値 $E[X]$ を計算して下さい。

$$h(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ただし、次の極限值は既知とします：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{kx}} = 0 \quad (k > 0, n \geq 0)$$

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ、エ
---------	--------------

【解答例】

$$P[1 \leq X \leq 2] = \int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_1^2 = e^{-2} - e^{-4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xh(x) dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M 2xe^{-2x} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^M 2xe^{-2x} dx &= [-xe^{-2x}]_0^M - \int_0^M (-e^{-2x}) dx \\ &= -Me^{-2M} + \int_0^M e^{-2x} dx \\ &= -Me^{-2M} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^M \\ &= \frac{1}{2} - Me^{-2M} - \frac{1}{2}e^{-2M} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \quad (M \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

従って期待値は存在して $E[X] = \frac{1}{2}$ です。

□

問題 7 あるミックスナッツの缶詰の表示によると、少なくとも 1 個のカシューナッツがどの缶にも入っていないければなりません。ところが、ある工場で作られたミックスナッツの缶詰のうち 1.2 % にはカシューナッツが入っていませんでした。この工場で作られた 500 個の缶詰のうち、丁度 3 個の缶詰にカシューナッツが入っていない確率を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ
---------	------------

【解答例】 この工場で作られた缶詰全体から無作為に 1 つの缶詰を選んだときにカシューナッツが入っていれば 1、入っていないければ 0 をとる確率変数 X を考えます。

母集団 X から 500 個とったときのカシューナッツの入っている缶詰の個数 Y は、母集団 X からとった大きさ 500 の標本の和と考えられますから、これは二項分布 $B(500, 0.012)$ に従います。

この場合、 $500 \geq 20, 0.012 \leq 0.05$ が満たされているので、 Y はパラメータ $500 \cdot 0.012 = 6$ のポアソン分布で近似されます。

すると、

$$P[Y = 3] \approx \frac{6^3}{3!} e^{-6} \approx 36 \cdot 0.00248 = 0.08928$$

となります。

□