1 ある工場で直径 1cm の軸棒を標準偏差 0.03cm の管理水準で製造しています。ある日の製造品の中から 10 本のサンプルをとって直径を測定したところ、平均値が 0.978cm でした。品質管理上異常はないと考えても良いでしょうか。

帰無仮説 H_0：　『この日の製造品の直径の平均値は 1cm である』
対立仮説 H_1：　『この日の製造品の直径の平均値は 1cm ではない』

として有意水準 5 ％で仮説検定して下さい。
ただし、この日の製造品の直径の全体は正規分布に従っており、その標準偏差は 0.03cm であると仮定します。また、$\sqrt{10} \approx 3.16$ とします。

配点：12 点	シラバス到達目標：エ、カ、ケ

【解答例】　帰無仮説が正しいと仮定します。するとこの日の製造品の直径の全体は正規分布 $N(1, 0.03^2)$ に従います。

するとこの母集団からとった大きさ 10 の標本平均 $\overline{X}$ は $N\left(1, \frac{0.03^2}{10}\right)$ に従いますから、有意水準 0.05 での両側棄却域を求めるためにまず

$$0.05 = P\left[|\overline{X} - 1| \geq d\right]$$

●片側検定をしているもの
そのまま最後まで　-6点
途中まで　-9点

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned} 0.05 &= P\left[\left|\overline{X} - 1\right| \geq d\right] \\ &= P\left[\left|N\left(1, \frac{0.03^2}{10}\right) - 1\right| \geq d\right] \\ &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.03^2}{10}\right)\right| \geq d\right] \\ &= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.03}{\sqrt{10}}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{\sqrt{10}d}{0.03}\right] \end{aligned}$$

途中までのもの
最初のみ　2〜4点
標準化完了程度　5点

単純な計算ミス　-3点
変形等の重要なミス　-5点

標準正規分布表によれば

$$\frac{\sqrt{10}d}{0.03} \approx 1.96$$

従って

$$d \approx \frac{1.96 \times 0.03}{\sqrt{10}} \approx 0.0186$$

が分かります。

以上により求める棄却域は

$$(-\infty, 0.9814] \cup [1.0186, +\infty)$$

であり、今回のサンプル値 0.978 はこの棄却域に入っていますから、帰無仮説 H_0 は棄却され、この日の製造品の直径の平均値は 1cm ではないと判断されます。 □

判断のミス　-5点

2 自動車衝突事故の対物保険についてのある研究によると、ある特殊の破損を受けた 120 台の車体を無作為に選んだところ、それらの修理費の平均は 14.4 万円で、標準偏差は 1.7 万円でした。この種の修理の平均費用を信頼度 99 パーセントで区間推定してください。ただし $\sqrt{120} \approx 10.95$ としてください。

配点：12 点	シラバス到達目標：エ、カ、キ、ク

【解答例】　この種の修理の費用全体を母集団 X とし、そこからとった大きさ 120 の標本平均を $\overline{X}$ とします。

大きなサイズの標本をとっているので、X の標準偏差はサンプルの標準偏差 1.7 で代用することが出来、また中心極限定理によれば、母集団の平均を m として $\overline{X}$ は $N\left(m, \frac{1.7^2}{120}\right)$ で近似されます。

ここを1.7としているもの　-6点

まず

$$0.99 = P\left[\left|\overline{X} - m\right| \leq d\right]$$

ここですでにミス　-6点

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned}
0.99 &= P\left[\left|\overline{X} - m\right| \leq d\right] \\
&\approx P\left[\left|N\left(m, \frac{1.7^2}{120}\right) - m\right| \leq d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \leq \frac{d}{\frac{1.7}{\sqrt{120}}}\right] \\
0.495 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{1.7}{\sqrt{120}}}\right]
\end{aligned}$$

簡単な計算ミス　-3点
簡単なミスが多いもの　-6点

変形の重要なミス　-6点
重要なミスが多いもの　-9点

標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{\frac{1.7}{\sqrt{120}}} \approx 2.575$$

$$d \approx \frac{2.575 \times 1.7}{10.95} = \frac{4.3775}{10.95} \approx 0.3998$$

ですから、

$$0.99 = P\left[\left|\overline{X} - m\right| \leq 0.3998\right]$$

が成り立っています。

従って今回のサンプル値 14.4 について、信頼度 99 パーセントで不等式：

$$|14.4 - m| \leq 0.3998$$

つまり、

$$14.0002 \leq m \leq 14.7998$$

が成り立ちますから、これが求める推定区間です：

$$[14.0, 14.8]$$

□

3 ある自動ねじ製作機がねじを切る（＝ねじを作る）場合、平均 2000 本に 1 本の割合で溝のない不良品が生じます。

このねじ 1 包み（1000 本）を無作為に選んだとき、その中に不良品が 2 本以上含まれている確率を、ポアソン分布による近似を使って求めてください。ただし、ねじは大量に製造されており、1000 本の抽出は復元抽出と看做せるものとします。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】　ねじ全体の中から 1000 本とったときに含まれる不良品の数は 2 項分布 $B\left(1000, \frac{1}{2000}\right)$ に従います。

パラメーターの間違い　-5点

これは基準を満たしているのでパラメータ $1000 \cdot \frac{1}{2000} = 0.5$ のポアソン分布で近似することが出来ます。

３以上の確率を求めているものなど
重要なミスのあるもの　-5点

すると求める確率は、

$$1 - P[P_O(0.5) = 0] - P[P_O(0.5) = 1] = 1 - \mathrm{e}^{-0.5} - 0.5\mathrm{e}^{-0.5} \approx 0.0895$$

となります。 □

簡単な計算ミス　-3点
簡単なミスが多いもの　-5点

少しのみ　2〜3点

4 2 次元の確率変数 (X, Y) があり、X, Y は独立であって X は $N(2, 1)$、Y は $N(0, 1)$ に従っています。

(1) このとき $X + \sqrt{3}Y$ はどんな分布に従いますか。
(2) 確率 $P[4 \leq X + \sqrt{3}Y]$ を計算して下さい。

配点：12 点	シラバス到達目標：エ、オ

【解答例】　(1) 独立和なので期待値・分散共に和になり、独立和もまた正規分布なので、$X + \sqrt{3}Y$ は $N(2, 4)$ に従います。

ここの計算ミス　-3点

(2)

$$\begin{aligned}
P[4 \leq X + \sqrt{3}Y] &= P[4 \leq N(2, 4)] \\
&= P[2 \leq N(0, 4)] \\
&= P[1 \leq N(0, 1)] \\
&= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1] \\
&\approx 0.5 - 0.3413 \\
&= 0.1587
\end{aligned}$$

□

N(2,4)が分かっていれば　6点
それ以降の確率計算で　6点

表の読み方のミス　-2点
簡単な計算ミス　-2点
変形の重要なミス　-3点
途中までのもの　-4〜-5点

5 ある中古車センターにおいて、同一車種の中古車の使用年数 X（年）と価格 Y（万円）は下表のようになっていました。

X	1	4	10	2	5	6	8	1
Y	64	35	11	47	27	36	30	59

(1) X, Y の平均値と X の分散、X と Y の共分散を求めてください。ただし、一切の近似をせず、割り切れない分数は分数のまま答えてください。

(2) Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となることを利用して、使用年数が３年のときの価格を概算してください。

配点：40 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】　(1)

$$E[X] = \frac{1+4+\cdots+1}{8} = \frac{37}{8}$$

$$E[Y] = \frac{64+35+\cdots+59}{8} = \frac{309}{8}$$

計算ミス　-3点
定義のミス　-5点

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= \frac{1^2+4^2+\cdots+1^2}{8} - \frac{37^2}{8^2} \\ &= \frac{247}{8} - \frac{1369}{84} \\ &= \frac{1976-1369}{64} \\ &= \frac{607}{64} \end{aligned}$$

E[X]：10点
E[Y]：10点
Var[X]：10点
Cov[X,Y]：6点

$$Cov[X,Y] = \frac{1\cdot 64 + 4\cdot 35 + \cdots + 1\cdot 59}{8} - \frac{37}{8}\cdot\frac{309}{8} = \frac{1058}{8} - \frac{11433}{64} = -\frac{2969}{64}$$

計算ミス　-1点
定義のミス　-3点

計算の途中　-3点

(2) 回帰直線は

$$y - \frac{309}{8} = \frac{-\frac{2969}{64}}{\frac{607}{64}}\left(x - \frac{37}{8}\right)$$

ですから、これに $x = 3$ を代入すれば

$$\begin{aligned} y - \frac{309}{8} &= \frac{-2969}{607}\left(3 - \frac{37}{8}\right) \\ y &= \frac{2969}{607}\cdot\frac{13}{8} + \frac{309}{8} \\ &= \frac{38597}{607\cdot 8} + \frac{187563}{607\cdot 8} \\ &= \frac{226160}{4856} \\ &\approx 46.57 \end{aligned}$$

となって、使用年数が 3 年のときの価格は 46.6 万円と概算されます。 □

計算ミス　-2点

ただし、(1)でのミスによる
間違いのみの場合は　-1点

6 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 W に対して期待値 $E[W]$ と確率 $P[-2.2 \le W \le 0.3]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

配点：14 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

確率：8点

期待値：6点

$$\begin{aligned} P[-2.2 \le W \le 0.3] &= \int_{-2.2}^{0.3} h(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0.3} \frac{3}{4}(1-x^2)dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3\right]_{-1}^{0.3} \\ &= \frac{0.9-0.027}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2.873}{4} \\ &= 0.71825 \end{aligned}$$

積分範囲の間違い　-4点

簡単な計算ミス　-2点
重要なミス　-4点

$$\begin{aligned} E[W] &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}x(1-x^2)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

定義ミス　-4点

簡単な計算ミス　-2点

少しのみ　-5点
積分計算の途中　-3点

□