問題 **1** ある化学反応工程で温度 X（度）に対する収量 Y（グラム）は次の表の通りでした：

X	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Y	48	54	59	63	68	73	78	82	84

(1) X, Y それぞれの平均値と X の分散を求めて下さい。ただし、分数計算が割り切れない場合は四捨五入等の近似は一切せず、分数の形で答えて下さい。

(2) X, Y の共分散 $Cov[X,Y]$ を求め、Y の X への回帰直線：

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

を使って温度が 95 度のときの収量を求めて下さい。

配点：(1)30 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】　(1)

$$E[X] = \frac{50 + \cdots + 130}{9} = 90$$
$$E[Y] = \frac{48 + \cdots + 84}{9} = \frac{609}{9} = \frac{203}{3}$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X-90)^2] \\ &= \frac{2(40^2 + 30^2 + 20^2 + 10^2)}{9} = \frac{6000}{9} = \frac{2000}{3} \end{aligned}$$

(2) 共分散は

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[XY] - 90 \cdot \frac{609}{9} \\ &= \frac{50 \cdot 48 + \cdots + 130 \cdot 84}{9} - 6090 \\ &= \frac{57570}{9} - 6090 \\ &= \frac{2760}{9} \\ &= \frac{920}{3} \end{aligned}$$

です。従って回帰直線は

$$y - \frac{203}{3} = \frac{920}{2000}(x - 90)$$

ですから、x に 95 を代入すると

$$y = \frac{92}{200} \cdot 5 + \frac{203}{3} = \frac{2099}{30} \sim 69.97$$

が得られます。従って温度が 95 度のときの収量は 70 程度と考えられます。　□

問題 2 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 C について、確率 $P[-1 \leq C \leq 1]$ と期待値 $E[C]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

配点：20 点	シラバス到達目標：ア、ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[-1 \leq A \leq 1] &= \int_{-1}^{1} h(x)dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

一方、

$$\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) dx = \left[-\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^2 = 1.$$

ですから、期待値 $E[C]$ は存在して 1 です。 □

問題 3 確率変数 G が正規分布 $N(-2, 9)$ に従うとき、以下の問いに答えてください。

(1) $P[-2.39 \leq G < 1.63]$ を標準正規分布表を使って求めて下さい。

(2) $P[w \leq G] = 0.0102$ となるような w の値を標準正規分布表を使って求めて下さい。

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】　(1)

$$\begin{aligned} P[-2.39 \leq G < 1.63] &= P[-2.39 \leq N(-2,9) < 1.63] \\ &= P[-0.39 \leq N(0,9) < 3.63] \\ &= P[-0.13 \leq N(0,1) < 1.21] \\ &= P[0 \leq N(0,1) \leq 0.13] + P[0 \leq N(0,1) \leq 1.21] \\ &\approx 0.0517 + 0.3869 \\ &= 0.4386 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 0.0102 &= P[w \leq G] \\ &= P[w \leq N(-2,9)] \\ &= P\left[\frac{w+2}{3} \leq \frac{N(-2,9)+2}{3}\right] \\ &= P\left[\frac{w+2}{3} \leq N(0,1)\right] \end{aligned}$$

この確率が 0.5 未満なので $0 < \frac{w+2}{3}$ であって

$$= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{w+2}{3}\right]$$

$$P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{w+2}{3}\right] = 0.4898$$

ですから正規分布表から

$$\frac{w+2}{3} \sim 2.32 \quad \text{すなわち} \quad w = 4.96$$

が分かります。

□

問題 4 $[-1,0]$ 上の一様分布の密度関数 $f(x)$ と、$[0,1]$ 上の一様分布の密度関数 $g(x)$ に対してたたみ込み $f * g$ を計算して下さい。ただし、たたみ込みは

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

で定義されます。

配点：15 点	シラバス到達目標：イ、オ

【解答例】　まず $f(x), g(x)$ は、

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,0] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

です。

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{0}^{1} f(x-y)dy$$

であり、$f(x-y) \neq 0$ であるのは $-1 \leq x - y \leq 0$ の範囲、すなわち、$x \leq y \leq x+1$ ですから、この範囲と積分範囲 $0 \leq y \leq 1$ の重なり具合を、x の値によって場合分けして調べます。

【$x \leq -1$ の場合】このときは $f(x) = 0$ です。

【$-1 \leq x \leq 0$ の場合】

$$f(x) = \int_0^{x+1} dy = x + 1$$

【$0 \leq x \leq 1$ の場合】

$$f(x) = \int_x^1 dy = 1 - x$$

【$1 \leq x$ の場合】このときは $f(x) = 0$ です。

従って

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & 1 \leq x \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1 \end{cases}$$

です。　□

問題 **5** (1) ２変数関数 $h(x, y)$ が２次元の確率変数 $\mathbb{X} = (X, Y)$ の密度関数であるとはどう云うことか簡潔に説明して下さい。

(2) 長方形 $[-1, 1] \times [2, 5] = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 2 \leq y \leq 5\}$ 上の一様分布の密度関数を答えてください。ただし説明は不要であり、関数のみ記述してください。

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：エ、オ

【解答例】　(1) ２変数非負値関数 $h(x, y)$ が２次元の確率変数 $\mathbb{X}$ の密度関数であるとは、任意の領域 D（もしくは、任意の長方形 D）に対して

$$P[\mathbb{X} \in D] = \left(\begin{array}{l} \text{領域 } D \text{ を床とし、この領域の境界線上に垂直な} \\ \text{壁を立て、曲面 } z = h(x, y) \text{ を屋根とした立体の体積} \end{array} \right) = \iint_D h(x, y)\,dxdy$$

が成り立つことです。

(2)

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (x, y) \in [-1, 1] \times [2, 5] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

□