問題 1 ある選挙での候補者 A の得票率を p とします。400 人に出口調査をした結果、80 人が候補者 A に投票したと言っています。ただし、有権者数が非常に大きいのでサンプルの抽出は復元抽出とみなせるものとします。

400 人のランダムサンプルにおける候補者 A に投票した人数を X とすると X は２項分布 $B(400, p)$ に従いますが、これを正規分布 $N(400p, 400 \cdot 0.2 \cdot 0.8)$ で近似して（その際、半整数補正はしないでください）候補者 A の得票率 p の信頼度 0.95 の信頼区間を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ、ク

【解答例】　X を正規分布 $N(400p, 64)$ で近似して

$$0.95 = P[|X - 400p| \leq d]$$

となるような d を求めます。

$$\begin{aligned}
0.95 &= P[|X - 400p| \leq d] \\
&\approx P[|N(400p, 64) - 400p| \leq d] \\
&= P\left[|N(0,1)| \leq \frac{d}{8}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{8}\right]
\end{aligned}$$

ですから、正規分布表により $\frac{d}{8} \approx 1.96$、すなわち $d \approx 15.68$ が分かります。

従って

$$0.95 = P[|X - 400p| \leq 15.68]$$

ですから、今回のサンプル値 80 について、信頼度 95 ％で

$$\begin{gathered}
|80 - 400p| \leq 15.68 \\
80 - 15.68 \leq 400p \leq 80 + 15.68 \\
64.32 \leq 400p \leq 95.68 \\
0.1608 \leq p \leq 0.2392
\end{gathered}$$

が成り立ちますから、求める得票率 p の信頼区間は $[0.1608, 0.2392]$ です。

□

問題 **2** ある工場で生産しているスチールパイプの直径の平均値が 20.0mm であると言えるかどうか、大きさ 100 のサンプル調査によって有意水準 5 %で検定する事にしました。そこで実際に 100 個取り出して直径を測定したところ、平均値が 20.2mm、分散が 0.45^2mm でした。

帰無仮説 H_0 :『母平均は 20.0mm である』が正しいと仮定して棄却域を求め、帰無仮説が棄却されるかどうか調べて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ、ケ

【解答例】　帰無仮説 H_0 が正しい、即ち母平均は 20.0 であると仮定します。

今回のサンプルはサイズが大きいので、不明な母分散はこのサンプルの分散 0.45^2 で代用します。また、中心極限定理を適用する事が出来るので、この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(20, \frac{0.45^2}{100}\right)$ で近似されます。

そこでまず

$$0.05 = P[|\bar{X} - 20| \geq d]$$

となるような正数 d を求めます。

$$\begin{aligned}
0.05 &= P[|\bar{X} - 20| \geq d] \\
0.95 &= P[|\bar{X} - 20| \leq d] \\
&\sim P\left[\left|N\left(0, \frac{0.45^2}{100}\right)\right| \leq d\right] \\
&\sim P\left[|N(0,1)| \leq \frac{d}{\frac{0.45}{10}}\right] \\
&\sim 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.045}\right] \\
0.475 &\sim P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.045}\right]
\end{aligned}$$

ですから、標準正規分布表から $\frac{d}{0.045} \sim 1.96$、従って $d \sim 0.0882$ が分かります。

従って求める両側棄却域は $(-\infty, 20-0.0882] \cup [20+0.0882, \infty)$ 即ち、$(-\infty, 19.9118] \cup [20.0882, \infty)$ です。

今回のサンプル平均 20.2 はこの棄却域に入っています。従って帰無仮説は棄却され、スチールパイプの直径の平均値は 20.0mm ではないと考えられます。　□

問題 3 次の２次元データ (X, Y) において：

(520,42),(370,20),(740,54),(580,30),(920,68),
(420,34),(820,55),(680,40),(550,40),(500,17)

X, Y それぞれの平均値と X, Y の共分散を求めて下さい（近似はしないこと）。

配点：34 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】

$$E[X] = \frac{520 + \cdots + 500}{10} = \frac{6100}{10} = 610$$

$$E[Y] = \frac{42 + \cdots + 17}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \frac{(520 - 610)(42 - 40) + \cdots + (500 - 610)(17 - 40)}{10} \\ &= \frac{\begin{array}{l}(-90)2 + (-240)(-20) + 130 \cdot 14 + (-30)(-10) + 310 \cdot 28 \\ \quad + (-190)(-6) + 210 \cdot 15 + 70 \cdot 0 + (-60)0 + (-110)(-23)\end{array}}{10} \\ &= \frac{-180 + 4800 + 1820 + 300 + 8680 + 1140 + 3150 + 2530}{10} \\ &= 2224 \end{aligned}$$

□

問題 4 当たりくじが 1000 本中 3 本入っているくじを 100 本買ったとき、当たりくじが 2 本以上含まれている確率をポアソン分布による近似を用いて求めてください。ただし、このくじは極めて多数売られているため、復元抽出したとみなせるとし、$\mathrm{e}^{-0.3} \approx 0.741$ とします。

配点：6 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】　100 本中の当たりくじの数を表す確率変数 X は 2 項分布 $B\left(100, \frac{3}{1000}\right)$ に従うとみなせます。$np = 0.3$ なので正規分布では近似できませんが、パラメータ 0.3 のポアソン分布で近似することができます。

$$\begin{aligned} P[X \geq 2] &= 1 - \sum_{k=0}^{1} P[X = k] \\ &\approx 1 - P[P_O(0.3) = 0] - P[P_O(0.3) = 1] \\ &= 1 - (1 + 0.3)\mathrm{e}^{-0.3} \\ &\approx 1 - 1.3 \cdot 0.741 \\ &\approx 0.037. \end{aligned}$$

□

問題 5 ある母集団から大きさ 50 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプルの平均値が 54.3、分散が 24.5 でした。母平均の信頼度 99 ％の信頼区間を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ、ク

【解答例】　サンプルサイズが大きいので、サンプルの分散で母分散の代用とします。また、中心極限定理によれば、母平均を m とするとこの母集団からとった大きさ 50 の標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{24.5}{50}\right)$ で近似されます。

まず

$$0.99 = P\left[\left|\overline{X} - m\right| \leq d\right]$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned} 0.99 &= P\left[\left|\overline{X} - m\right| \leq d\right] \\ &\approx P\left[\left|N\left(m, \frac{24.5}{50}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P[|N(0, 0.49)| \leq d] \\ &= P\left[|N(0,1)| \leq \frac{d}{0.7}\right] \\ 0.495 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.7}\right] \end{aligned}$$

すると正規分布表より

$$2.575 \approx \frac{d}{0.7} \quad \text{従って} \quad d \approx 1.8025$$

が得られます。

従って

$$0.99 \approx P\left[\left|\overline{X} - m\right| \leq 1.80\right]$$

が成り立ちますので、今回のサンプル値 54.3 について、信頼度 99 ％で

$$\begin{aligned} |54.3 - m| &\leq 1.80 \\ 54.3 - 1.80 \leq m &\leq 54.3 + 1.80 \\ 52.50 \leq m &\leq 56.10 \end{aligned}$$

が成り立ちますから、求める信頼区間は $[52.5, 56.1]$ です。　□

問題 **6** 密度関数が次の $f(x)$：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられる確率変数 X の期待値を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}-1} x\mathrm{e}^x dx \\ &= \left[\frac{1}{\mathrm{e}-1}x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}-1}\mathrm{e}^x dx \\ &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{1}{\mathrm{e}-1}\left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1} \end{aligned}$$

従って期待値は存在して

$$E[X] = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$$

です。 □

問題 **7** 正規分布 $N(13, 2.5)$ に従う母集団からとった大きさ 10 の標本平均 $\overline{X}$ について、確率 $P\left[12.4 < \overline{X}\,\right]$ を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：カ、キ

【解答例】　$\overline{X}$ は正規分布 $N\left(13, \frac{2.5}{10}\right)$ に従いますから、

$$\begin{aligned} P\left[12.4 < \overline{X}\,\right] &= P\left[12.4 < N\left(13, \frac{2.5}{10}\right)\right] \\ &= P\left[-0.6 < N\left(0, 0.25\right)\right] \\ &= P\left[-\frac{0.6}{0.5} < N\left(0,1\right)\right] \\ &= P[-1.2 < N(0,1)] \\ &= 0.5 + P[0 \le N(0,1) \le 1.2] \\ &\approx 0.5 + 0.3849 \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

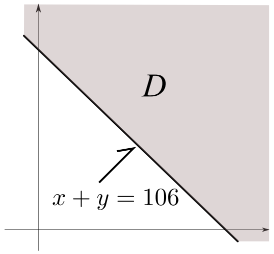
です。 □

問題 8 ２次元の確率変数 (X, Y) は X, Y が独立であって、X は正規分布 $N(50, 16)$ に、Y は正規分布 $N(60, 9)$ に従っています。

このとき図の領域 D に対して

$$(x, y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad x + y > 106$$

となることに注意して $P[(X, Y) \in D]$ を求めて下さい。



配点：10 点	シラバス到達目標：エ、オ

【解答例】

$$(X, Y) \in D \iff X + Y > 106$$

であることと、$X + Y$ が $N(110, 25)$ に従うことによれば、

$$\begin{aligned}
P[(X, Y) \in D] &= P[X + Y > 106] \\
&= P[N(110, 25) > 106] \\
&= P[N(0, 25) > -4] \\
&= P\left[N(0, 1) > -\frac{4}{5}\right] \\
&= 0.5 + P[0 \leq N(0, 1) \leq 0.8] \\
&\approx 0.5 + 0.2881 \\
&= 0.7881
\end{aligned}$$

です。 □