

1 次の表はある地域で産出される赤ワインについて、年度ごとの育成期の平均気温 D 、10 年後の市場価値（1961 年産の価格との比の対数） P をまとめたものです：

	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
D	16.5	17.3	16.3	15.7	17.3	15.4	16.5	16.2	16.2	16.6
P	-2.0	0	-1.1	-1.8	-1.2	-2.2	-0.7	-1.7	-2.2	-2.1

(1) D, P の平均値 $E[D], E[P]$ を計算して下さい。値は一切の近似をせずに求めて下さい。

(2) D の分散 $Var[D]$ と D と P の共分散 $Cov[D, P]$ を求めて下さい。値は一切の近似をせずに求めて下さい。

(3) P の D への回帰直線が

$$y - E[P] = \frac{Cov[D, P]}{Var[D]}(x - E[D])$$

となることを使って平均気温 D が 16.0 だった場合の価値 P の推定値を求めて下さい。値は四捨五入により小数点以下 2 桁で答えて下さい。

配点：(1)30 点、(2)(3)20 点

シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} E[D] &= \frac{16.5 + 17.3 + 16.3 + 15.7 + 17.3 + 15.4 + 16.5 + 16.2 + 16.2 + 16.6}{10} \\ &= 16.4 \\ E[P] &= \frac{-2.0 + 0 - 1.1 - 1.8 - 1.2 - 2.2 - 0.7 - 1.7 - 2.2 - 2.1}{10} \\ &= -1.5 \end{aligned}$$

(2)

	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
$D - E[D]$	0.1	0.9	-0.1	-0.7	0.9	-1.0	0.1	-0.2	-0.2	0.2
$P - E[P]$	-0.5	1.5	0.4	-0.3	0.3	-0.7	0.8	-0.2	-0.7	-0.6
積	-0.05	1.35	-0.04	0.21	0.27	0.7	0.08	0.04	0.14	-0.12

$$\begin{aligned} Var[D] &= \frac{(16.5 - 15.4)^2 + (17.3 - 15.4)^2 + (16.3 - 15.4)^2 + (15.7 - 15.4)^2 + (17.3 - 15.4)^2 + (15.4 - 15.4)^2 + (16.5 - 15.4)^2 + (16.2 - 15.4)^2 + (16.2 - 15.4)^2 + (16.6 - 15.4)^2}{10} \\ &= \frac{(0.1)^2 + (0.9)^2 + (-0.1)^2 + (-0.7)^2 + (0.9)^2 + (-1.0)^2 + (0.1)^2 + (-0.2)^2 + (-0.2)^2 + (0.2)^2}{10} \\ &= \frac{0.01 + 0.81 + 0.01 + 0.49 + 0.81 + 1 + 0.01 + 0.04 + 0.04 + 0.04}{10} \\ &= \frac{3.26}{10} \\ &= 0.326 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov[D, P] &= E[(D - E[D])(P - E[P])] \\ &= \frac{0.1 \cdot (-0.5) + 0.9 \cdot 1.5 + (-0.1) \cdot 0.4 + (-0.7) \cdot (-0.3) + 0.9 \cdot 0.3 + (-1.0) \cdot (-0.7) + 0.1 \cdot 0.8 + (-0.2) \cdot (-0.2) + (-0.2) \cdot (-0.7) + 0.2 \cdot (-0.6)}{10} \\ &= \frac{-0.05 + 1.35 - 0.04 + 0.21 + 0.27 + 0.7 + 0.08 + 0.04 + 0.14 - 0.12}{10} \\ &= \frac{2.58}{10} \\ &= 0.258 \end{aligned}$$

(3) 回帰直線は

$$y + 1.5 = \frac{0.258}{0.326}(x - 16.4)$$

ですから、 $x = 16.0$ を代入すると

$$\begin{aligned} y + 1.5 &= \frac{0.258}{0.326}(16.0 - 16.4) \\ y &= -\frac{0.258 \cdot 0.4}{0.326} - 1.5 \\ &\sim -1.8166 \end{aligned}$$

となりますから、平均気温が 16.0 だった場合の平均価格は概算で -1.82 となります。□

2 $[-1, 1]$ 上の一様分布の密度関数を $f(x)$ とするとき、たたみこみ $(f * f)(x)$ を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：イ、オ

【解答例】 この一様分布の密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ですから、

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

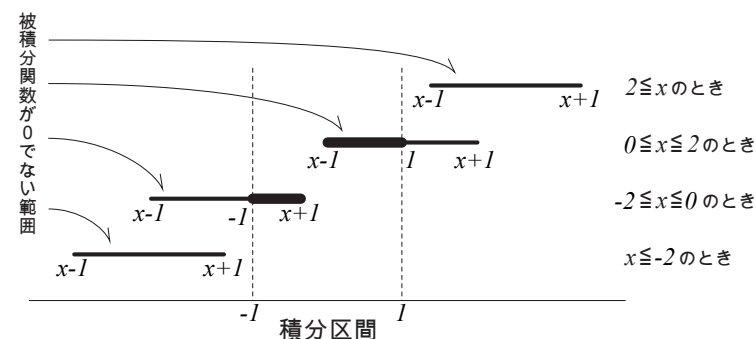
であり、まず被積分関数のうち第 2 因子 $f(y)$ の方を具体化すると

$$= \int_{-1}^1 f(x-y)\frac{1}{2}dy$$

となります。

次に残った部分を具体化します。定義により被積分関数は $-1 < x-y < 1$ すなわち $x-1 < y < x+1$ である範囲以外では 0 となるのでこの範囲 $[x-1, x+1]$ が積分区間 $[-1, 1]$ とどう交わるかが問題となります。

これを x の値によって場合分けすると、下図の通りであり：



積分は以下の通りになります：

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ \int_{x-1}^1 \frac{1}{4} dy & 0 \leq x \leq 2 \\ \int_{-1}^{x+1} \frac{1}{4} dy & -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -2 \end{cases}.$$

□

3 密度関数が次の $h(x)$ であるような確率変数 X について確率 $P[1 \leq X \leq 2]$ を求めて下さい。また期待値 $E[X]$ が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値も求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{3}x + 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：20 点

シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[1 \leq X \leq 2] &= \int_1^2 h(x) dx \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x + 1 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^2 + x \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x h(x) dx &= \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3} x^2 + x \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{9} x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{2}{9} - \frac{1}{9} \cdot 26 + \frac{1}{2} \cdot 8 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ですから、期待値は存在して

$$E[X] = \frac{4}{3}$$

です。

□

4 確率変数 B が正規分布 $N(37, 3^2)$ に従うときに、裏面にある標準正規分布表を使って確率 $P[41 \leq B]$ を計算して下さい。

配点：10 点

シラバス到達目標：エ

【解答例】

$$\begin{aligned}
 P[41 \leq B] &= P[41 \leq N(37, 3^2)] \\
 &= P[4 \leq N(0, 3^2)] \\
 &= P\left[\frac{4}{3} \leq N(0, 1)\right] \\
 &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.33] \\
 &\approx 0.5 - 0.4082 \\
 &\approx 0.0918
 \end{aligned}$$

□

5 xy -平面内の領域（長方形） D と関数 $h(x, y)$ が次の通りであるときに：

$$D : [0, 1] \times [1, 3], \quad h(x, y) = xy^2 + 1$$

D を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて曲面 $z = h(x, y)$ で屋根をかけて出来る立体の体積 $V_D(h)$ を求めて下さい。

配点：10 点

シラバス到達目標：オ

【解答例】

$$\begin{aligned}
 V_D(h) &= \int_1^3 \left\{ \int_0^1 (xy^2 + 1) dx \right\} dy \\
 &= \int_1^3 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 + x \right]_0^1 dy \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{1}{2} y^2 + 1 \right) dy \\
 &= \left[\frac{1}{6} y^3 + y \right]_1^3 \\
 &= \frac{26}{6} + 2 \\
 &= \frac{19}{3}
 \end{aligned}$$

□