問題 **1** ある工場で生産しているスチールパイプから 100 個取り出して直径を測定したところ、平均 20.1mm、標準偏差 0.23mm でした。
　全てのスチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm であると工場は言っていますがその主張は正しいと判断して良いでしょうか、

帰無仮説 H_0：　『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm である』
対立仮説 H_1：　『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm でない』

として有意水準 1 ％で仮説検定して下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ケ

【解答例】　サンプルサイズが大きいので、母分散はサンプル分散 0.23^2 で代用します。
　帰無仮説 H_0 が正しいと仮定すると、スチールパイプ全体の中からとった大きさ 100 の標本平均 $\overline{X}$ は、中心極限定理により正規分布 $N\left(20.0, \frac{0.23^2}{100}\right)$ で近似されます。

　問題は直径の平均値が 20.0mm であるかどうかを問題にしていますから有意水準 0.01 で両側検定すれば良く、まずは棄却域を求めます。

$$\begin{aligned} 0.01 &= P[|\overline{X} - 20.0| \geq d] \\ &\approx P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \geq d\right] \\ &= 2P\left[d \leq N\left(0, 0.023^2\right)\right] \\ 0.005 &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 0.023^2) \leq d] \\ 0.495 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \end{aligned}$$

によれば正規分布表を参照して $\frac{d}{0.023} \approx 2.575$、つまり、$d \approx 0.059$ が分かります。

　これは

$$0.01 \approx P[|\overline{X} - 20.0| \geq 0.059]$$

を意味し、棄却域は $(-\infty, 19.94] \cup [20.06, \infty)$ であり、今回の具体値 20.1 はこの棄却域に入っており、帰無仮説 H_0 は棄却されます。
　以上から主張は正しいとは言えません。　□

問題 **2** ある母集団の変量 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。この母集団から大きさ 16 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプル平均値が 54.3 でした。母平均 m の信頼度 95 ％の信頼区間を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：ク

【解答例】 この母集団からとった大きさ 16 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{100}{16}\right)$ に従います。そこで

$$P[|\bar{X}-m| \le d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned}
0.95 &= P[|\bar{X}-m| \le d] \\
&= P\left[\left|N\left(m, \frac{100}{16}\right) - m\right| \le d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \le \frac{d}{\frac{10}{4}}\right] \\
&= 2P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d}{\frac{10}{4}}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d}{\frac{10}{4}}\right]
\end{aligned}$$

ここで標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{\frac{10}{4}} \sim 1.96$$

ですから、これを解けば、$d \sim 4.9$ が得られます。従って

$$P[|\bar{X}-m| \le 4.9] \sim 0.95$$

であり、今回のサンプル値 54.3 については、信頼度 95 ％で

$$|54.3 - m| \le 4.9, \quad \text{すなわち} \quad 49.4 \le m \le 59.2$$

が成り立っていると言えます。従って求める信頼区間は $[49.4, 59.2]$ です。

□

問題 3 見た目がいびつなあるサイコロを 400 回投げたところ、6 の目が 75 回出ました。以下の問いに答えてください。

(1) このいびつなサイコロで 6 の目が出る確率を p とするとき、400 回振った時の 6 の出る回数 X はどんな分布に従いますか。

(2) X の分散をサンプル値を使って

$$400 \cdot \frac{75}{400}\left(1 - \frac{75}{400}\right) = \frac{75 \cdot 325}{400} \approx 7.81^2$$

で代用することにして、X を正規分布 $N(400p, 7.81^2)$ で近似します（半整数補正はしないことにします）。この方法で 6 の目が出る確率 p の 95 %信頼区間を求めて下さい。

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：エ、ク

【解答例】　(1) このサイコロの 6 の出る確率が p ですから、400 回振った時の 6 の出数 X は 2 項分布 $B(400, p)$ に従います。

(2) X の分散を題意の通りに

$$400 \cdot \frac{75}{400}\left(1 - \frac{75}{400}\right) = \frac{75 \cdot 325}{400} \approx 7.81^2$$

で代用することにして、X を正規分布 $N(400p, 7.81^2)$ で近似します。

まず

$$P[|X - 400p| \le d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めると

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|X - 400p| \le d] \\ &\approx P[|N(400p, 7.81^2) - 400p| \le d] \\ &= P\left[|N(0,1)| \le \frac{d}{7.81}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d}{7.81}\right] \end{aligned}$$

から

$$\frac{d}{7.81} \approx 1.96 \quad \text{従って} \quad d \approx 15.31$$

が得られますから、今回のサンプル値 75 について、信頼度 95 %で不等式：

$$|75 - 400p| \le 15.31$$

すなわち

$$\begin{aligned} 75 - 15.31 \le 400p &\le 75 + 15.31 \\ 0.149 \le p &\le 0.226 \end{aligned}$$

が成り立ちますから、求める信頼区間は $[0.149, 0.226]$ です。

□

問題 4 次の文章が正しいかどうか〇／×で答えてください：

(1) 母集団が正規分布に従う場合、標本平均も正規分布に従う。

(2) 大きさ 100 の標本分散の平均値は母集団の平均値の $\frac{99}{100}$ 倍である。

(3) 母集団と同じ分布に従う i.i.d. な確率変数のファミリー（集まり）を、この母集団からとった標本と言う。

配点：各 5 点	シラバス到達目標：カ、キ

【解答例】 (1) 〇、(2) ×、 (3) 〇. □

問題 5 平均 10.0、分散 3.1^2 の正規分布に従う母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ について、確率 $P\left[\bar{X} \leq 10.53\right]$ を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ、オ、カ、キ

【解答例】 $\bar{X}$ は $N\left(10, \frac{3.1^2}{100}\right)$ に従いますから、

$$
\begin{aligned}
P[\bar{X} \leq 10.53] &= P\left[N\left(10, \frac{3.1^2}{100}\right) \leq 10.53\right] \\
&= P\left[N\left(0, \frac{3.1^2}{100}\right) \leq 0.53\right] \\
&= P\left[N\left(0,1\right) \leq \frac{0.53}{\sqrt{\frac{3.1^2}{100}}}\right] \\
&= P\left[N\left(0,1\right) \leq \frac{0.53}{0.31}\right] \\
&\approx P\left[N\left(0,1\right) \leq 1.71\right] \\
&= 0.5 + P[0 \leq N(0,1) \leq 1.71] \\
&\approx 0.5 + 0.4564 \\
&= 0.9564
\end{aligned}
$$

です。 □

問題 6　２次元の確率変数 (A, B) の各成分 A, B は独立であって、共に標準正規分布に従っています。このとき確率：$P[A-B>2.50]$ を求めてください。ただし、$\sqrt{2} \approx 1.41$ とします。

配点：5 点	シラバス到達目標：イ、エ、オ

【解答例】　$A-B$ は $N(0,2)$ に従いますので

$$
\begin{aligned}
P[A-B>2.50] &= P[N(0,2)>2.50] \\
&= P\left[N(0,1) > \frac{2.5}{1.41}\right] \\
&\approx P\left[N(0,1)>1.77\right] \\
&= 0.5 - P[0 \leq N(0,1) \leq 1.77] \\
&\approx 0.5 - 0.4616 \\
&= 0.0384
\end{aligned}
$$

です。　□

問題 7　次の２次元データ (X, Y) について、平均値 $E[X], E[Y]$、共分散 $Cov[X, Y]$ を求めてください。

X	1.0	3.0	2.5	2.0	4.0
Y	11.0	17.0	15.0	13.0	19.0

配点：25 点	シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1+3+2.5+2+4}{5} = \frac{12.5}{5} = 2.5 \\
E[Y] &= \frac{11+17+15+13+19}{5} = \frac{75}{5} = 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= \frac{11+51+37.5+26+76}{5} - 37.5 \\
&= 40.3 - 37.5 \\
&= 2.8
\end{aligned}
$$

□

問題 **8** $[-1, 5]$ 上の一様分布の平均値を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：ア、ウ、エ

【解答例】　一様分布の密度関数は有界領域の外で 0 ですから、平均値は存在します。また、一様分布は、その区間の中点に関して左右対称に分布していますから、平均値は区間の中点である 2 になります。 $\square$