

問題 1 新しく開発した制がん剤を、がんになっている 10 匹のモルモットに投与し、体重 X (第 1 成分、単位 mg) と生存日数 Y (第 2 成分、単位日) の統計をとったところ次の様になりました：

$$(X, Y) : (520, 42), (370, 20), (740, 54), (580, 30), (920, 68), \\ (420, 34), (820, 55), (680, 40), (550, 40), (500, 17)$$

以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい (近似はしないこと)。
- (2) X, Y の共分散を求め (近似はしないこと)、更に Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、体重が 1210mg の場合の生存日数を推定して下さい。

配点：(1)40 点、(2)5 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{520 + \cdots + 500}{10} = \frac{6100}{10} = 610$$

$$E[Y] = \frac{42 + \cdots + 17}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \frac{(520 - 610)^2 + \cdots + (500 - 610)^2}{10} \\ &= \frac{90^2 + 240^2 + 130^2 + 30^2 + 310^2 + 190^2 + 210^2 + 70^2 + 60^2 + 110^2}{10} \\ &= \frac{8100 + 57600 + 16900 + 900 + 96100 + 36100 + 44100 + 4900 + 3600 + 12100}{10} \\ &= \frac{280400}{10} \\ &= 28040 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \frac{(520 - 610)(42 - 40) + \cdots + (500 - 610)(17 - 40)}{10} \\ &= \frac{(-90)2 + (-240)(-20) + 130 \cdot 14 + (-30)(-10) + 310 \cdot 28 \\ &\quad + (-190)(-6) + 210 \cdot 15 + 70 \cdot 0 + (-60)0 + (-110)(-23)}{10} \\ &= \frac{-180 + 4800 + 1820 + 300 + 8680 + 1140 + 3150 + 2530}{10} \\ &= 2224 \end{aligned}$$

回帰直線は

$$y - 40 = \frac{2224}{28040}(x - 610)$$

ですから、体重が 1210mg の時の生存日数の推定値は

$$y = \frac{2224}{28040}600 + 40 = \frac{1334400}{28040} + 40 \approx 87.59$$

から 87.6 日となります。

□

問題 2 密度関数が次の $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[0.5 \leq X]$ を求めてください。

配点：15 点

シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[0.5 \leq X] &= \int_{0.5}^{\infty} h(x) dx \\ &= \int_{0.5}^1 x dx + \int_1^2 (-x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{8} - \frac{3}{2} + 2 \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

【別解】

$$\begin{aligned} P[0.5 \leq X] &= 1 - P[0 \leq X \leq 0.5] \\ &= 1 - \int_0^{0.5} x dx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

□

問題 3 ある英語の試験の受験者数は 50 万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 122.8、標準偏差（分散の正の平方根）が 41.2 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。得点が 170 点だった受験者の順位はだいたい何位くらいでしょうか。

配点：15 点 シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】 求めるべき順位は 171 点以上の人何人いるかを求めれば良いことが分かります。

得点を表す確率変数を X とすると、これは $P[170 < X]$ を求め、これに 500000 を掛ける事によって概算出来ます。

X は正規分布 $N(122.8, 41.2^2)$ で近似されますから

$$\begin{aligned} P[170 < X] &= P[170 - 122.8 < X - 122.8] \\ &= P\left[\frac{47.2}{41.2} < \frac{X - 122.8}{41.2}\right] \\ &\approx P[1.146 < N(0, 1)] \\ &\approx 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.15] \end{aligned}$$

となり、正規分布表から

$$\begin{aligned} &= 0.5 - 0.3749 \\ &= 0.1251 \end{aligned}$$

が得られ、これに受験者総数の 500000 を掛けて

$$500000 \times 0.1251 = 62550$$

が分かります。171 点以上の人大体これだけ居ますから 170 点の人は大体 62550 番程度であると考えられます。

【別解 その 1】 $P[171 \leq X]$ を計算しても良いでしょう：

$$\begin{aligned} P[171 \leq X] &= P[171 - 122.8 \leq X - 122.8] \\ &= P\left[\frac{48.2}{41.2} \leq \frac{X - 122.8}{41.2}\right] \\ &\approx P[1.146 \leq N(0, 1)] \\ &\approx 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.146] \end{aligned}$$

となり、正規分布表から 1.14 と 1.15 の間の値を読んで

$$\begin{aligned} &= 0.5 - 0.374 \\ &= 0.126 \end{aligned}$$

が得られ、これに受験者総数の 500000 を掛けて

$$500000 \times 0.126 = 63000$$

が分かります。171 点以上の人大体これだけ居ますから 170 点の人は大体 63000 番程度であると考えられます。

【別解 その 2】 正規分布表から 1.14 の値を読んで

$$0.5 - 0.3729 = 0.1271$$

が得られ、これに受験者総数の 500000 を掛けて

$$500000 \times 0.1271 = 63550$$

が分かります。171 点以上の人大体これだけ居ますから 170 点の人は大体 63550 番程度であると考えられます。

問題 4 確率変数 R が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[R \leq w] = 0.209$ を満たす w の値を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned} 0.209 &= P[R \leq w] \\ &= P[N(5, 4) \leq w] \\ &= P\left[N(0, 1) \leq \frac{w-5}{2}\right] \end{aligned}$$

ですが、この確率が 0.5 未満であるため、 $\frac{w-5}{2}$ は負の数であり、

$$\begin{aligned} &= P\left[\frac{5-w}{2} \leq N(0, 1)\right] \\ &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{5-w}{2}\right] \\ 0.291 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{5-w}{2}\right] \end{aligned}$$

となつて、正規分布表より

$$\frac{5-w}{2} \sim 0.81 \quad w \sim 3.38$$

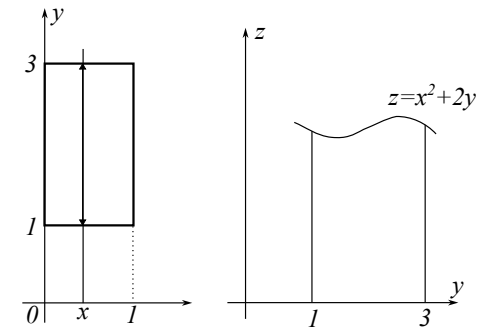
が得られます。

□

問題 5 xy 平面の長方形 $[0, 1] \times [1, 3]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて、曲面 $z = x^2 + 2y$ を屋根とした立体の体積を求めてください。

配点：15 点 シラバス到達目標：オ

【解答例】 この立体を x 軸に垂直にスライスしたとき、床と断面の様子は以下の通りであり、



断面積は

$$\int_1^3 (x^2 + 2y) dy$$

ですから、求める体積 V はこの断面積を 0 から 1 まで x で積分して

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left\{ \int_1^3 (x^2 + 2y) dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 [x^2 y + y^2]_1^3 dx \\ &= \int_0^1 (2x^2 + 8) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 + 8x \right]_0^1 \\ &= \frac{26}{3} \end{aligned}$$

です。

□

問題 1 新しく開発した制がん剤を、がんになっている 10 匹のモルモットに投与し、体重 X (第 1 成分、単位 mg) と生存日数 Y (第 2 成分、単位日) の統計をとったところ次の様になりました：

$$(X, Y) : (520, 42), (370, 20), (740, 54), (580, 30), (920, 68), \\ (420, 34), (820, 55), (680, 40), (550, 40), (500, 17)$$

以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい (近似はしないこと)。
- (2) X, Y の共分散を求め (近似はしないこと)、更に Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、体重が 910mg の場合の生存日数を推定して下さい。

配点：(1)40 点、(2)5 点 シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{520 + \cdots + 500}{10} = \frac{6100}{10} = 610$$

$$E[Y] = \frac{42 + \cdots + 17}{10} = \frac{400}{10} = 40$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \frac{(520 - 610)^2 + \cdots + (500 - 610)^2}{10} \\ &= \frac{90^2 + 240^2 + 130^2 + 30^2 + 310^2 + 190^2 + 210^2 + 70^2 + 60^2 + 110^2}{10} \\ &= \frac{8100 + 57600 + 16900 + 900 + 96100 + 36100 + 44100 + 4900 + 3600 + 12100}{10} \\ &= \frac{280400}{10} \\ &= 28040 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \frac{(520 - 610)(42 - 40) + \cdots + (500 - 610)(17 - 40)}{10} \\ &= \frac{(-90)2 + (-240)(-20) + 130 \cdot 14 + (-30)(-10) + 310 \cdot 28 \\ &\quad + (-190)(-6) + 210 \cdot 15 + 70 \cdot 0 + (-60)0 + (-110)(-23)}{10} \\ &= \frac{-180 + 4800 + 1820 + 300 + 8680 + 1140 + 3150 + 2530}{10} \\ &= 2224 \end{aligned}$$

回帰直線は

$$y - 40 = \frac{2224}{28040}(x - 610)$$

ですから、体重が 910mg の時の生存日数の推定値は

$$y = \frac{2224}{28040}300 + 40 = \frac{667200}{28040} + 40 \approx 63.79$$

から 63.8 日となります。

□

【別解】

問題 2 密度関数が次の $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[0.5 \leq X]$ を求めてください。

$$\begin{aligned} P[0.5 \leq X] &= 1 - P[0 \leq X \leq 0.5] \\ &= 1 - \int_0^{0.5} x \, dx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{0.5} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

□

配点：15 点 シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[0.5 \leq X] &= \int_{0.5}^{\infty} h(x) \, dx \\ &= \int_{0.5}^1 x \, dx + \int_1^2 (-x + 2) \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{0.5}^1 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{8} - \frac{3}{2} + 2 \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

問題 3 ある英語の試験の受験者数は 50 万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 122.8、標準偏差（分散の正の平方根）が 41.2 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。得点が 180 点だった受験者の順位はだいたい何位くらいでしょうか。

配点：15 点 シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】 求めるべき順位は 181 点以上の人が何人いるかを求めれば良いことが分かります。

得点を表す確率変数を X とすると、これは $P[180 < X]$ を求め、これに 500000 を掛ける事によって概算出来ます。

X は正規分布 $N(122.8, 41.2^2)$ で近似されますから

$$\begin{aligned} P[180 < X] &= P[180 - 122.8 < X - 122.8] \\ &= P\left[\frac{57.2}{41.2} < \frac{X - 122.8}{41.2}\right] \\ &\approx P[1.388 < N(0, 1)] \\ &\approx 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.39] \end{aligned}$$

となり、正規分布表から

$$\begin{aligned} &= 0.5 - 0.4177 \\ &= 0.0823 \end{aligned}$$

が得られ、これに受験者総数の 500000 を掛けて

$$500000 \times 0.0823 = 41150$$

が分かります。181 点以上の人が大体これだけ居ますから 180 点の人は大体 41150 番程度であると考えられます。

【別解 その 1】 $P[181 \leq X]$ を計算しても良いでしょう：

$$\begin{aligned} P[181 \leq X] &= P[181 - 122.8 < X - 122.8] \\ &= P\left[\frac{58.2}{41.2} < \frac{X - 122.8}{41.2}\right] \\ &\approx P[1.413 < N(0, 1)] \\ &\approx 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.41] \end{aligned}$$

となり、正規分布表から

$$\begin{aligned} &= 0.5 - 0.4207 \\ &= 0.0793 \end{aligned}$$

が得られ、これに受験者総数の 500000 を掛けて

$$500000 \times 0.0793 = 39650$$

が分かります。181 点以上の人が大体これだけ居ますから 180 点の人は大体 39650 番程度であると考えられます。

□

問題 4 確率変数 R が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[R \leq w] = 0.695$ を満たす w の値を求めて下さい。

配点：10 点 シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned} 0.695 &= P[R \leq w] \\ &= P[N(5, 4) \leq w] \\ &= P\left[N(0, 1) \leq \frac{w-5}{2}\right] \end{aligned}$$

ですが、この確率が 0.5 以上であるため、 $\frac{w-5}{2}$ は正の数であり、

$$0.195 = P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{w-5}{2}\right]$$

となって、正規分布表より

$$\frac{w-5}{2} \approx 0.51 \quad w \approx 6.02$$

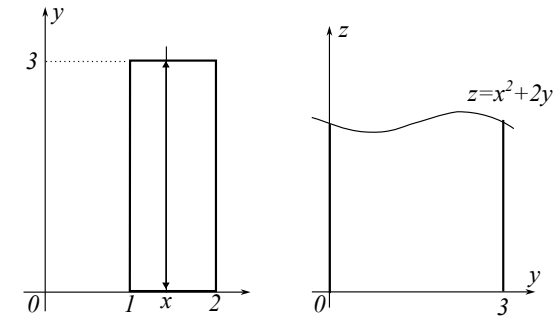
が得られます。

□

問題 5 xy 平面の長方形 $[1, 2] \times [0, 3]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて、曲面 $z = x^2 + 2y$ を屋根とした立体の体積を求めてください。

配点：15 点 シラバス到達目標：オ

【解答例】 この立体を x 軸に垂直にスライスしたとき、床と断面の様子は以下の通りであり、



断面積は

$$\int_0^3 (x^2 + 2y) dy$$

ですから、求める体積 V はこの断面積を 1 から 2 まで x で積分して

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \left\{ \int_0^3 (x^2 + 2y) dy \right\} dx \\ &= \int_1^2 [x^2 y + y^2]_0^3 dx \\ &= \int_1^2 (3x^2 + 9) dx \\ &= [x^3 + 9x]_1^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

です。

□