

14 仮説検定その 2 片側検定・母比率の検定

14.1 片側検定

問題 14.1.1 ある工場で生産している製品の重さは、通常は平均値が 80g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、最近ちょっと重いのではないかとの疑義が生じています（分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします）。正しく生産されているか調べるために、ある日の製品の中から 100 個のサンプルを抽出して調査をする事になりました。

実際にサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 80.9g でした。この日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。有意水準 5% で検定して下さい。

今回問題となっているのは母平均が 80g であるかどうかではなくて、『母平均が 80g より大きいかどうか』です。

問題：母集団の平均値は 80 より大きいか？

この場合、平均値の想定値である 80g の両側に棄却域を設定してしまうと、80g よりもずっと小さなサンプル結果が出た場合にも帰無仮説は棄却されて仕舞います。出来れば 80g よりずっと大きなサンプル結果が出た場合だけ帰無仮説を棄却し、母平均は通常より大きいんだと結論したい筈です。

帰無仮説：母集団の平均値は 80 である。

そこで、母平均は 80 であると仮定（帰無仮説）したうえで、この日の製品の中から取り出す大きさ 100 の標本平均を \bar{X} として

$$0.05 = P[80 + d \leq \bar{X}]$$

となる $d > 0$ を求めることにします。 $\bar{X} - 80$ は $N(0, \frac{1}{4})$ に従いましたから

$$0.05 = P[d \leq \bar{X} - 80] = P\left[\frac{d}{\frac{1}{2}} \leq N(0, 1)\right] = 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 2d]$$

$$0.45 = P[0 \leq N(0, 1) \leq 2d]$$

となり、正規分布表から $2d \approx 1.645$ 、つまり $d \approx 0.82$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[80.82 \leq \bar{X}] = P[\bar{X} \in [80.82, \infty)]$$

を意味しますので、今回は棄却域を $[80.82, \infty)$ として判断をします（サンプル値が重い方に大きくずれた場合のみ棄却されるように設定している）。

棄却域： $[80.82, \infty)$

今回のサンプル値 80.9 はこの片側棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、この日は平常よりも重かったと判断されます。 □

母平均が 80g より重いかどうか問題であれば、重い側のみに棄却域を設定し、サンプル値が棄却域に入った場合には母平均は 80g より重いと判断します。このような検定を（右）片側検定と言います。

帰無仮説は両側検定の場合と同一ですが、設定する棄却域に違いがあるので帰無仮説が棄却されたときに何が言えるかは違ってきます。ここを『対立仮説』として明示しておいた方が良いでしょう。

■ 80g かどうか問題の場合（両側検定）

帰無仮説： この日の重さの平均値は 80g である

対立仮説： この日の重さの平均値は 80g ではない

棄却域： $(-\infty, 79.02] \cup [80.98, \infty)$

■ 80g より重いかどうか問題の場合（右片側検定）

帰無仮説： この日の重さの平均値は 80g である

対立仮説： この日の重さの平均値は 80g より重い

棄却域： $[80.82, \infty)$

基本演習 14.1 健常者の血清カルシウムの平均値は 9.8mg/dl です。今回無作為に選んだ 16 人の副甲状腺機能低下症患者の血清カルシウムの平均は 7.4mg/dl でした。副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値が健常者よりも低いかどうかを、有意水準 0.05 で仮説検定してください。

ただし副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの全体は正規分布に従い、標準偏差は 0.5mg/dl であるとしします。

14.2 母比率の仮説検定

問題 14.2.1 ある都市で、全有権者の中から 500 人をランダムに選んで現内閣を支持するか否かを聞いたところ、330 人が支持すると答えました。

(1) 母比率 p の 95 % 信頼区間を求めてください。ただし、 p の値は概ね 0.5 から 0.8 の間であることは分かっているものとします。

(2) 前回調査時の支持率を 70 % とするとき、今回の支持率は変化したといえるか、有意水準 5 % で検定してください。

(3) 前回までの支持率は 70 % に安定していたが、今回は諸般の事情から支持率の低下が取りざたされていた。今回支持率は低下したといえるか、有意水準 5 % で検定してください。

(1) 全有権者中の支持者の比率を p とすると、無作為に抽出した 500 人のサンプル中の支持者数 X は 2 項分布 $B(500, p)$ に従います。 p の値は 0.5 から 0.8 の間であることが分かっているとのことから、

$$500p \geq 250, \quad 500(1-p) \geq 100$$

であって、2 項分布 $B(500, p)$ は正規分布 $N(500p, 500p(1-p))$ で近似されます。

ここで X の分散は本来 $500p(1-p)$ ですが、サンプル比率 $\frac{330}{500}$ を使って

$$500 \cdot \frac{330}{500} \cdot \frac{170}{500} = \frac{561}{5} = 112.2 \approx 10.59^2$$

で代用して、 X を正規分布 $N(500p, 10.59^2)$ で近似し、

$$0.95 = P[|X - 500p| \leq d]$$

となるような $d > 0$ を求めると (半整数補正を行った場合は)、

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx P[|N(500p, 10.59^2) - 500p| \leq d + 0.5] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d + 0.5}{10.59}\right] \\ 0.475 &\approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d + 0.5}{10.59}\right] \end{aligned}$$

から $\frac{d+0.5}{10.59} \approx 1.96$ 、すなわち $d \approx 20.26$ が得られます。

以上から、今回のサンプル値 330 について、信頼度 0.95 で

$$\begin{aligned} |330 - 500p| &\leq 20.26 \\ 309.74 &\leq 500p \leq 350.26 \\ 0.619 &\leq p \leq 0.701 \end{aligned}$$

が成り立ちますので、求める信頼区間は [61.9%, 70.1%] です。

半整数補正を行わなかった場合は

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx P[|N(500p, 10.59^2) - 500p| \leq d] = P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{10.59}\right] \\ 0.475 &\approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{10.59}\right] \end{aligned}$$

から $\frac{d}{10.59} \approx 1.96$ 、すなわち $d \approx 20.76$ が得られます。

以上から、今回のサンプル値 330 について、信頼度 0.95 で

$$\begin{aligned} |330 - 500p| &\leq 20.76 \\ 309.24 &\leq 500p \leq 350.76 \\ 0.618 &\leq p \leq 0.702 \end{aligned}$$

が成り立ちますので、求める信頼区間は [61.8%, 70.2%] です。

- (2) 帰無仮説 H_0 : 『今回の支持率は 70 % である』
対立仮説 H_1 : 『今回の支持率は 70 % ではない』

まず帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると全有権者からとった 500 人のサンプル中の支持者数 X は 2 項分布 $B(500, 0.7)$ に従いますので、正規分布 $N(500 \cdot 0.7, 500 \cdot 0.7 \cdot 0.3)$ で近似されます。そこでまずは

$$0.05 = P[|X - 500 \cdot 0.7| \geq d]$$

となるような d を求めます (半整数補正あり)。

$$\begin{aligned} 0.05 &= P[|X - 500 \cdot 0.7| \geq d] \\ &= P[|B(500, 0.7) - 350| \geq d] \\ &\approx P[|N(350, 105) - 350| \geq d - 0.5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left[|N(0, 1)| \geq \frac{d-0.5}{\sqrt{105}}\right] \\
 0.475 &\approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d-0.5}{\sqrt{105}}\right] \\
 \frac{d-0.5}{\sqrt{105}} &\approx 1.96 \\
 d &\approx 20.59
 \end{aligned}$$

となりますから、棄却域は $(-\infty, 329.41] \cup [370.59, \infty)$ です。

今回のサンプル値 330 はこの棄却域に入らないため、帰無仮説 H_0 を棄却するに足る合理的な根拠はないと判断され、今回の支持率は前回から変化したとは言えないことがわかります。

半整数補正を行わない場合も

$$\begin{aligned}
 0.05 &= P[|X - 500 \cdot 0.7| \geq d] \\
 &= P[|B(500, 0.7) - 350| \geq d] \\
 &\approx P[|N(350, 105) - 350| \geq d] \\
 &= P\left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{\sqrt{105}}\right] \\
 0.475 &\approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\sqrt{105}}\right] \\
 \frac{d}{\sqrt{105}} &\approx 1.96 \\
 d &\approx 20.09
 \end{aligned}$$

となりますから、棄却域は $(-\infty, 329.91] \cup [370.09, \infty)$ です。

この場合もサンプル値 330 は棄却域に入らないため、帰無仮説 H_0 を棄却するに足る合理的な根拠はないと判断され、今回の支持率は前回から変化したとは言えないことがわかります。

- (3) 帰無仮説 H_0 : 『今回の支持率は 70 % である』
 対立仮説 H_2 : 『今回の支持率は 70 % より低い』

まず帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると全有権者からとった 500 人のサンプル中の支持者数 X は 2 項分布 $B(500, 0.7)$ に従い、正規分布 $N(350, 105)$ で近似されま

す。そこで

$$0.05 = P[X \leq 500 \cdot 0.7 - d]$$

となるような d を求めます (半整数補正あり)。

$$\begin{aligned}
 0.05 &= P[X \leq 500 \cdot 0.7 - d] \\
 &= P[B(500, 0.7) \leq 350 - d] \\
 &\approx P[N(350, 105) \leq 350 - d + 0.5] \\
 &= P\left[N(0, 1) \leq \frac{-d + 0.5}{\sqrt{105}}\right] \\
 0.45 &\approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d - 0.5}{\sqrt{105}}\right] \\
 \frac{d - 0.5}{\sqrt{105}} &\approx 1.645 \\
 d &\approx 17.36
 \end{aligned}$$

であり、棄却域は $(-\infty, 332.64]$ となります。

今回のサンプル値 330 はこの棄却域に入っており、帰無仮説 H_0 は棄却され、今回の支持率は前回の 70 % よりも低くなったと判断されます。

半整数補正を行わない場合は

$$\begin{aligned}
 0.05 &= P[X \leq 500 \cdot 0.7 - d] \\
 &= P[B(500, 0.7) \leq 350 - d] \\
 &\approx P[N(350, 105) \leq 350 - d] \\
 &= P\left[N(0, 1) \leq \frac{-d}{\sqrt{105}}\right] \\
 0.45 &\approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\sqrt{105}}\right] \\
 \frac{d}{\sqrt{105}} &\approx 1.645 \\
 d &\approx 16.86
 \end{aligned}$$

であり、棄却域は $(-\infty, 333.14]$ となります。

従ってこの場合もサンプル値 330 はこの棄却域に入っており、帰無仮説 H_0 は棄却され、今回の支持率は前回の 70 % よりも低くなったと判断されます。

14.3 問題演習

■片側検定の問題

基本演習 14.1 健常者の血清カルシウムの平均値は 9.8mg/dl です。今回無作為に選んだ 16 人の副甲状腺機能低下症患者の血清カルシウムの平均は 7.4mg/dl でした。副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値が健常者よりも低いかどうかを、有意水準 0.05 で仮説検定してください。

ただし副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの全体は正規分布に従い、標準偏差は 0.5mg/dl であるとして下さい。

基本演習 14.2 ある工場で生産される糸の強さは平均 170.8g の重さに耐えるように作られています。最近糸が弱くなったと苦情が寄せられています。糸の強さ X は正規分布 $N(m, 5.5^2)$ に従うことが経験的に分かっており、平均 m は 170.8g よりも小さいことが予想されます。今製品から 50 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均は 169.5g でした。糸は弱くなったと言って良いのでしょうか？有意水準 0.05 で検定して下さい。また、同様に有意水準 0.01 でも検定して下さい。

基本演習 14.3 [教 練習問題 16-4] ある工場で生産している製品は通常重さの平均値が 80g、標準偏差が 4g の正規分布をしています。ある日の製品の中から 50 個の標本を抽出して測定したところ、重さの平均値が 80.8g でした。その日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。標準偏差は変わらないものとして有意水準 5% で検定して下さい。

■母比率の仮説検定

発展演習 14.4 [教科書 練習問題 16-6] あるサイコロを 600 回無作為に投げたところ、1 の目が 118 回出ました。このサイコロは 1 の目が出やすいと言えるでしょうか。有意水準 1% で検定して下さい。

■母平均の仮説検定総復習

基本演習 14.5 ある工場で作られる電球の寿命は標準偏差 100 時間の正規分布に従っています。計画では寿命の平均値は 1800 時間になるように製造されている筈ですがこの平均値に関して疑義が生じています。

そこでこの工場で作られた多数の電球の中から 25 個を抽出して寿命時間を測定したところ、その平均値は 1835 時間でした。以下の 3 通りで検定して下さい。

- (1) 寿命時間の平均値は 1800 時間より長いと言えるか、有意水準 5%
- (2) 寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか、有意水準 5%
- (3) 寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか、有意水準 10%

基本演習 14.6 [教 例題 16.4] ある工場では生産しているスチールボールの規格を直径 $12\text{mm} \pm 0.5\text{mm}$ としています。いま一つの製品ロットから次の個数を無作為に取り出して直径を測定したところ、どの場合も平均値 12.04mm、分散 0.12^2mm でした。それぞれの条件のもとでこのロットのスチールボールの直径の平均値は規格の中央値の 12mm であると言えるでしょうか。有意水準 5% で検定して下さい。

- (1) 20 個、直径の分布は正規分布、母標準偏差は 0.1mm。
- (2) 80 個、母標準偏差は 0.1mm。
- (3) 80 個、母標準偏差は不明。
- (4) (1) と同じ条件で、平均値は 12mm より大きいと言えるかどうか。

基本演習 14.7 [教 問題 16.11] ある工場で製品の寿命時間は正規分布に従い、その標準偏差は 120 時間であることが分かっています。この会社では『当工場の製品の寿命の平均値は 1800 時間である』と公表しています。この工場の製品 10 個を無作為に抽出して寿命を測定したところ平均値が 1760 時間でした。この会社の公表は正しいと認められるでしょうか、有意水準 5% で検定して下さい。

基本演習 14.8 [教 練習問題 16-1] ある工場で作られているスチールパイプから 100 個取り出して直径を測定したところ、平均 20.1mm、分散 0.23^2mm でした。

- (1) 直径の母平均 m の信頼度 99% の信頼区間を求めて下さい。
- (2) 直径の平均値 m は 20.0mm であると工場は言っています。その主張は正しいと言えるでしょうか、有意水準 1% で検定して下さい。

基本演習 14.9 ある工場の資料によると、機械 A で作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 100 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.71g、標準偏差が 0.23g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また標準偏差はサンプル値の 0.23g であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準 5% で仮説検定して下さい。

問題演習解答

基本演習 14.1 健常者の血清カルシウムの平均値は 9.8mg/dl です。今回無作為に選んだ 16 人の副甲状腺機能低下症患者の血清カルシウムの平均は 7.4mg/dl でした。副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値が健常者よりも低いかどうかを、有意水準 0.05 で仮説検定してください。

ただし副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの全体は正規分布に従い、標準偏差は 0.5mg/dl であるとします。

帰無仮説 H_0 : 『副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値は健常者と同じ 9.8mg/dl である』

対立仮説 H_1 : 『副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値は健常者の平均値 9.8mg/dl より低い』

まず仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの値の全体 X は正規分布 $N(9.8, 0.5^2)$ に従うので、ここからとった大きさ 16 の標本平均 \bar{X} は $N\left(9.8, \frac{0.5^2}{16}\right)$ に従います。

まず有意水準 0.05 の左片側棄却域を求めるために、

$$P[\bar{X} \leq 9.8 - d] = 0.05$$

となるような $d > 0$ を求めます。すると

$$\begin{aligned} 0.05 &= P[\bar{X} \leq 9.8 - d] \\ &= P\left[N\left(9.8, \frac{0.5^2}{16}\right) \leq 9.8 - d\right] \\ &= P\left[N\left(0, \frac{0.5^2}{16}\right) \leq -d\right] \\ &= P[N(0, 1) \leq -8d] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 8d] \\ 0.45 &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 8d] \end{aligned}$$

となり、正規分布表から $8d \approx 1.645$ 、つまり $d \approx 0.206$ が分かります。従って求める棄却域は $(-\infty, 9.59]$ であり、今回のサンプル平均は棄却域に入っているため帰無仮説は

棄却され、対立仮説が採択されます。つまり、副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値は健常者の平均値 9.8mg/dl より低いと判断されます。□

基本演習 14.2 ある工場で生産される糸の強さは平均 170.8g の重さに耐えるように作られています。最近糸が弱くなったと苦情が寄せられています。糸の強さ X は正規分布 $N(m, 5.5^2)$ に従うことが経験的に分かっており、平均 m は 170.8g よりも小さいことが予想されます。今製品から 50 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均は 169.5g でした。糸は弱くなったと言って良いのでしょうか？有意水準 0.05 で検定して下さい。また、同様に有意水準 0.01 でも検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0 : 『糸の強さの平均は 170.8 である』
対立仮説 H_1 : 『糸の強さの平均は 170.8 より小さい』

まず仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると、ここからとった大きさ 50 の標本平均 \bar{X} は正規分布 $N\left(170.8, \frac{5.5^2}{50}\right)$ に従うと言えます。

問題は糸の強さが弱いかどうかですから平均値より小さい側の片側検定としてまず有意水準 5% の棄却域を計算します。

$$\begin{aligned} 0.05 &= P[\bar{X} - 170.8 \leq -d] \\ &= P\left[N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq -d\right] \\ 0.05 &= 0.5 - P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\ 0.45 &= P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\ &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{5\sqrt{2}d}{5.5}\right] \end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{5\sqrt{2}d}{5.5} \approx 1.645$ すなわち $d \approx 1.28$ が分かります。これは結局

$$P[\bar{X} - 170.8 \leq -1.28] \approx 0.05$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 169.52$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 169.5 はこの棄却域に入っていますから、仮説 H_0 は棄却され、糸は弱くなったと判断されます。

次に有意水準 1% の棄却域を計算します。

$$\begin{aligned} 0.01 &= P[\bar{X} - 170.8 \leq -d] \\ &= P\left[N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq -d\right] \\ 0.01 &= 0.5 - P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\ 0.49 &= P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\ &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{5\sqrt{2}d}{5.5}\right] \end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{5\sqrt{2}d}{5.5} \approx 2.325$ すなわち $d \approx 1.81$ が分かります。これは結局

$$P[\bar{X} - 170.8 \leq -1.81] \approx 0.01$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 169$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 169.5 はこの棄却域に入りませんから、仮説 H_0 を棄却するに足る理由はないと考えられ、糸は弱くなったとは言えないと判断されます。□

ただし近似値の取り方によっては棄却域に入るかどうかの判定が上の逆になる場合もあります。

基本演習 14.3 [高専教科書 練習問題 16-4] ある工場で生産している製品は通常重さの平均値が 80g、標準偏差が 4g の正規分布をしています。ある日の製品の中から 50 個の標本を抽出して測定したところ、重さの平均値が 80.8g でした。その日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。標準偏差は変わらないものとして有意水準 5% で検定して下さい。

【解答例】

帰無仮説 H_0 : 『この日も重さの平均値は 80g であった』

対立仮説 H_1 : 『この日は重さの平均値は 80g より重かった』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。するとこの日の製品の中から取り出す大きさ 50 の標本平均 \bar{X} は正規分布 $N\left(80, \frac{4^2}{50}\right)$ に従います。

今回問題になっているのは平常より重いかどうかですから片側検定として有意水準 5% の棄却域を求めます。つまり、

$$0.05 = P[d \leq \bar{X}]$$

となる $d > 0$ を求めます。標準化すれば

$$\begin{aligned} &= P\left[\frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}} \leq N(0, 1)\right] \\ &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}}\right] \\ 0.45 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d-80}{\frac{4}{5\sqrt{2}}} \approx 1.645$ 、つまり、 $d \approx 80.93$ が分かります。これは

$$0.01 \approx P[80.93 \leq \bar{X}]$$

を意味し、棄却域は $[80.93, \infty)$ であり、今回の具体値 80.8 はこの棄却域に入っておらず、仮説を棄却するだけの合理的な根拠はないと判定されます。

従ってこの日も平常よりも重かったとは言えません。□

発展演習 14.4 [教科書 練習問題 16-6] あるサイコロを 600 回無作為に投げたところ、1 の目が 118 回出ました。このサイコロは 1 の目が出やすいと言えるでしょうか。有意水準 1% で検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0 : 『このサイコロは 1 の出る確率が $\frac{1}{6}$ である』

対立仮説 H_1 : 『このサイコロは 1 の出る確率が $\frac{1}{6}$ より大きい』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。この場合 600 回投げて 1 の目が出る数は 2 項分布 $B\left(600, \frac{1}{6}\right)$ に従います。

今回問題となっているのは 1 の目が出やすいかどうかですから右側片側検定として棄却域を求めますが、2 項分布は正規分布で近似して計算します。

$$\begin{aligned} 0.01 &= P \left[d \leq B \left(600, \frac{1}{6} \right) \right] \\ &\approx P \left[d - \frac{1}{2} \leq N \left(100, \frac{500}{6} \right) \right] \\ &\approx P \left[\frac{d - \frac{1}{2} - 100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \leq N(0, 1) \right] \\ &= 0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d - \frac{1}{2} - 100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \right] \\ 0.49 &= P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d - \frac{1}{2} - 100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d - \frac{1}{2} - 100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} \approx 2.325$ 、つまり、 $d \approx 121.72$ が分かります。これは

$$0.01 \approx P \left[B \left(600, \frac{1}{6} \right) \geq 121.72 \right]$$

を意味し、求める棄却域は $[121.72, \infty)$ となります。今回の具体値 118 はこの棄却域に入っておりません。従って仮説を棄却するに足る理由はないと考えられ、1 の目は出やすいとは言えないこととなります。□

基本演習 14.5 ある工場で作られる電球の寿命は標準偏差 100 時間の正規分布に従っています。計画では寿命の平均値は 1800 時間になるように製造されている筈ですがこの平均値に関して疑義が生じています。

そこでこの工場で作られた多数の電球の中から 25 個を抽出して寿命時間を測定したところ、その平均値は 1835 時間でした。以下の 3 通りで検定して下さい。

- (1) 寿命時間の平均値は 1800 時間より長いと言えるか、有意水準 5 %
- (2) 寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか、有意水準 5 %
- (3) 寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか、有意水準 10 %

【解答例】仮説 H_0 : 『電球の寿命時間の平均値は 1800 時間である』が正しいと仮定します。

すると調査に使った 25 個のサンプルは、正規分布 $N(1800, 100^2)$ に従う母集団からの大きさ 25 の標本と考えられ、大きさ 25 の標本平均を \bar{X} と書く事にすれば \bar{X} は正規分布 $N \left(1800, \frac{100^2}{25} \right)$ に従うことが分かります。

(1) この場合は平均値が 1800 時間より長いかどうかを問題にしているので、

対立仮説 H_1 : 『電球の寿命時間の平均値は 1800 時間より長い』

と考え、右片側検定としてまず棄却域を求めます。

$$0.05 = P[\bar{X} - 1800 \geq d]$$

となる $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned} &= P \left[N \left(0, \frac{100^2}{25} \right) \geq d \right] \\ &= P \left[N(0, 1) \geq \frac{d}{20} \right] \\ &= 0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{20} \right] \end{aligned}$$

$$0.45 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{20} \right]$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{20} \approx 1.645$ 、つまり、 $d \approx 32.9$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[\bar{X} - 1800 \geq 32.9]$$

を意味し、今回の具体値 1835 はこの棄却域に入っています。従って仮説は棄却され、寿命は 1800 時間より長いと言えます。

(2) この場合は平均値が 1800 時間であるかどうかを問題にしているので

対立仮説 H_2 : 『電球の寿命時間の平均値は 1800 時間ではない』

を考え、両側検定としてまず棄却域を求めます。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 1800| \geq d]$$

となる $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned} &= P \left[\left| N \left(0, \frac{100^2}{25} \right) \right| \geq d \right] \\ &= P \left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{20} \right] \\ &= 2P \left[N(0, 1) \geq \frac{d}{20} \right] \\ &= 2 \left(0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{20} \right] \right) \\ 0.475 &= P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{20} \right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{20} \approx 1.96$ 、つまり、 $d \approx 39.2$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[|\bar{X} - 1800| \geq 39.2]$$

を意味し、今回の具体値 1835 はこの棄却域に入っておらず、仮説を棄却するだけの合理的な根拠はないと判定されます。

従って平均値は 1800 時間でないとは言えないと判断されます。

(3) この場合も平均値が 1800 時間であるかどうかを問題にしているので

対立仮説 H_2 : 『電球の寿命時間の平均値は 1800 時間ではない』

を考え、両側検定としてまず棄却域を求めます。

$$0.10 = P[|\bar{X} - 1800| \geq d]$$

となる $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned} &= P \left[\left| N \left(0, \frac{100^2}{25} \right) \right| \geq d \right] \\ &= P \left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{20} \right] \\ &= 2P \left[N(0, 1) \geq \frac{d}{20} \right] \\ &= 2 \left(0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{20} \right] \right) \end{aligned}$$

$$0.45 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{20} \right]$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{20} \approx 1.645$ 、つまり、 $d \approx 32.9$ が分かります。これは

$$0.10 \approx P[|\bar{X} - 1800| \geq 32.9]$$

を意味し、今回の具体値 1835 はこの棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、平均値は 1800 時間ではないと言えます。 □

基本演習 14.6 [高専教科書 例題 16.4] ある工場では生産しているスチールボールの規格を直径 $12\text{mm} \pm 0.5\text{mm}$ としています。いま一つの製品ロットから次の個数を無作為に取り出して直径を測定したところ、どの場合も直径の平均値が 12.04mm 、分散が 0.12^2mm でした。それぞれの条件のもとでこのロットのスチールボールの直径の平均値は規格の中央値の 12mm であると言えるでしょうか。有意水準 5% で検定して下さい。

- (1) 20 個、全てのスチールボールの直径の分布は正規分布に従い、母標準偏差が 0.1mm であることが分かっている。
- (2) 80 個、母標準偏差が 0.1mm であることが分かっている。
- (3) 80 個、母標準偏差は不明。
- (4) (1) と同じ条件のもとで、このロットの直径の平均値は 12mm より大きいと言えるかどうか。

【解答例】

帰無仮説 H_0 : 『全てのスチールボールの直径の平均値は 12mm である』

対立仮説 H_1 : 『全てのスチールボールの直径の平均値は 12mm でない』

(1) 帰無仮説 H_0 が正しいと仮定し、母集団 $N(12, 0.1^2)$ から取った大きさ 20 の標本平均を \bar{X} とすると \bar{X} は正規分布 $N\left(12, \frac{0.1^2}{20}\right)$ に従います。

問題は直径の平均値が 12mm であるかどうかですから、有意水準 5% の両側棄却域を求めます。 $0.05 = P[|\bar{X} - 12| \geq d]$ となる様な $d > 0$ を求めると、標準化して

$$0.05 = P \left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \right] = 2P \left[N(0, 1) \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \right]$$

$$0.025 = 0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \right]$$

$$0.475 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \right]$$

ですから、正規分布表から $\frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \approx 1.96$ 、つまり、 $d \approx 0.0438$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[|\bar{X} - 12| \geq 0.0438]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 11.9562] \cup [12.0438, \infty)$ です。今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っておらず、仮説を棄却するだけの根拠はないことになり、直径の平均値は 12mm であると考えて良いこととなります。

(2) 帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。この場合はサンプル数が大きいので標本平均 \bar{X} は正規分布 $N\left(12, \frac{0.1^2}{80}\right)$ で近似されます。

問題は直径の平均値が 12mm であるかどうかですから、両側棄却域を求めます。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 12| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めると、近似し、さらに標準化して

$$0.05 = P \left[\left| N \left(12, \frac{0.1^2}{80} \right) - 12 \right| \geq d \right] = P \left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right] = 2P \left[N(0, 1) \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right]$$

$$0.025 = 0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right]$$

$$0.475 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right]$$

によれば正規分布表を参照して $\frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \approx 1.96$ 、つまり、 $d \approx 0.022$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[|\bar{X} - 12| \geq 0.022]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 11.978] \cup [12.022, \infty)$ です。今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っていますから、仮説は棄却され直径の平均値は 12mm ではないと判断されます。

(3) 帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。この場合サンプル数が大きいので母分散は 0.1^2 で代用し、中心極限定理により標本平均は正規分布で近似します。

つまり標本平均 \bar{X} は $N\left(12, \frac{0.1^2}{80}\right)$ に従いますから、 $0.05 = P[|\bar{X} - 12| \geq d]$ となる様な $d > 0$ を求めると、

$$0.05 \approx P \left[\left| N \left(12, \frac{0.1^2}{80} \right) - 12 \right| \geq d \right] = P \left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right] = 2P \left[N(0, 1) \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right]$$

$$0.025 = 0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right]$$

$$0.475 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \right]$$

によれば正規分布表を参照して $\frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{80}}} \approx 1.96$ 、つまり、 $d \approx 0.026$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[|\bar{X} - 12| \geq 0.026]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 11.974] \cup [12.026, \infty)$ です。今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っており、仮説は棄却され平均値は 12mm ではないと判断されます。

- (4) 帰無仮説 H_0 : 『全てのスチールボールの直径の平均値は 12mm である』
対立仮説 H_1 : 『全てのスチールボールの直径の平均値は 12mm より大きい』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。(1) と同様の事情によってこの母集団からとった大きさ 20 の標本平均を \bar{X} は正規分布 $N\left(12, \frac{0.1^2}{20}\right)$ に従います。

この場合は片側の棄却域で判定すれば良く、 $0.05 = P[\bar{X} - 12 \geq d]$ となる様な $d > 0$ を求めると、標準化して

$$0.05 = P \left[N(0, 1) \geq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \right]$$

$$0.05 = 0.5 - P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \right]$$

$$0.45 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \right]$$

ですから、正規分布表から $\frac{d}{\frac{0.1}{\sqrt{20}}} \approx 1.645$ 、つまり、 $d \approx 0.037$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[\bar{X} - 12 \geq 0.037]$$

を意味し、今回の具体値 12.04 はこの棄却域に入っているため仮説は棄却され、直径の平均値は 12mm より大きいと判断されます。□

基本演習 14.7 [高専教科書 問題 16.11] ある工場で製品の寿命時間は正規分布に従い、その標準偏差は 120 時間であることが分かっています。この会社では『当工場の製品の寿命の平均値は 1800 時間である』と公表しています。この工場の製品 10 個を無作為に抽出して寿命を測定したところ平均値が 1760 時間でした。この会社の公表は正しいと認められるでしょうか、有意水準 5 % で検定して下さい。

帰無仮説 H_0 : 『寿命の平均値は 1800 時間である』

対立仮説 H_1 : 『寿命の平均値は 1800 時間でない』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。するとこの母集団から取った大きさ 10 の標本平均 \bar{X} は正規分布 $N\left(1800, \frac{120^2}{10}\right)$ に従います。

平均値が 1800 に等しいかどうかの問題になっているので両側検定として棄却域を求めます。

$$\begin{aligned} 0.05 &= P[|\bar{X} - 1800| \geq d] \\ &= P\left[\left|N\left(0, \frac{120^2}{10}\right)\right| \geq d\right] \\ &= 2P\left[N\left(0, \frac{120^2}{10}\right) \geq d\right] \\ 0.025 &= 0.5 - P\left[0 \leq N\left(0, \frac{120^2}{10}\right) \leq d\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N\left(0, \frac{120^2}{10}\right) \leq d\right] \\ &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{\sqrt{10}d}{120}\right] \end{aligned}$$

ですから、正規分布表から $\frac{\sqrt{10}d}{120} \approx 1.96$ 、つまり、 $d \approx 74.38$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P[|\bar{X} - 1800| \geq 74.38]$$

を意味し、求める棄却域は $(-\infty, 1725.62] \cup [1874.38, \infty)$ です。今回の具体値 1760 はこの棄却域に入りません。従って仮説を棄却するだけの根拠はなく、会社の公表は正しいと判断されます。 □

基本演習 14.8 [高専教科書 練習問題 16-1] ある工場で生産しているスチールパイプから 100 個取り出して直径を測定したところ、平均値が 20.1mm、分散が 0.23^2 mm でした。

(1) 直径の母平均 m の信頼度 99 % の信頼区間を求めて下さい。

(2) 直径の平均値 m は 20.0mm であると工場は言っています。その主張は正しいと言えるでしょうか、有意水準 1 % で検定して下さい。

(1) スチールパイプ全体の中からのった大きさ 100 の標本平均を \bar{X} とします。母平均を m とすれば、 \bar{X} は正規分布 $N\left(m, \frac{0.23^2}{100}\right)$ に従いますから、

$$0.99 = P[|\bar{X} - m| \leq d]$$

となるような d を求めます。実際標準化してゆけば

$$\begin{aligned} 0.99 &= P[|\bar{X} - m| \leq d] \\ &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \leq d\right] \\ &= 2P\left[0 \leq N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right) \leq d\right] \\ 0.495 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \end{aligned}$$

がわかり、正規分布表から $\frac{d}{0.023} \approx 2.575$ 、すなわち、 $d \approx 0.059$ が得られます。これは 99 % の確率で $|\bar{X} - m| \leq 0.059$ となることを意味し、従って今回の具体値 20.1 に対しては、信頼度 99 % で $|20.1 - m| \leq 0.059$ 、つまり、

$$20.1 - 0.059 \approx 20.04 \leq m \leq 20.16 \approx 20.1 + 0.059$$

です。従って求める信頼区間は $[20.04, 20.16]$ です。

(2) 帰無仮説 H_0 : 『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm である』

対立仮説 H_1 : 『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm でない』

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。するとスチールパイプ全体の中からのった大きさ 100 の標本平均 \bar{X} は正規分布 $N\left(20.0, \frac{0.23^2}{100}\right)$ に従います。

問題は直径の平均値が 20.0mm であるかどうかを問題にしていますから有意水準 0.01 で両側検定すれば良く、まずは棄却域を求めます。

$$\begin{aligned} 0.01 &= P[|\bar{X} - 20.0| \geq d] \\ &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \geq d\right] \\ &= 2P[d \leq N(0, 0.023^2)] \\ 0.005 &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 0.023^2) \leq d] \\ 0.495 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \end{aligned}$$

よれば正規分布表を参照して $\frac{d}{0.023} \approx 2.575$ 、つまり、 $d \approx 0.059$ が分かります。これは

$$0.01 \approx P[|\bar{X} - 20.0| \geq 0.059]$$

を意味し、棄却域は $(-\infty, 19.94] \cup [20.06, \infty)$ であり、今回の具体値 20.1 はこの棄却域に入っており、仮説は棄却されます。

以上から主張は正しいとは言えません。 \square

基本演習 14.9 ある工場の資料によると、機械 A で作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られています。製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 100 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.71g、標準偏差が 0.23g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また標準偏差はサンプル値の 0.23g であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準 5% で仮説検定して下さい。

帰無仮説 H_0 : 『B で作られた製品の平均重量は 5.68g である』

対立仮説 H_1 : 『B で作られた製品の平均重量は 5.68g でない』

帰無仮説 H_0 を仮定します。すると問題に書かれている仮定から、B で作られた製品全体の中から取った大きさ 100 の標本平均 \bar{X} は正規分布 $N\left(5.68, \frac{0.23^2}{100}\right)$ に従います。

問題は平均重量に変化があったかどうかですから両側検定として有意水準 5% の棄却域を取ります。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めれば良いわけですが、標準化して

$$\begin{aligned} &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \geq d\right] \\ &= P\left[\left|N(0, 1)\right| \geq \frac{d}{0.023}\right] \\ &= 1 - 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{0.023} \approx 1.96$ 、つまり、 $d \approx 0.045$ が分かります。これは

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq 0.045]$$

を意味し、棄却域は $(-\infty, 5.635] \cup [5.725, \infty)$ となります。今回の具体値 5.71 はこの棄却域に入っていないので仮説を棄却するに足る理由はないと考えられ、平均重量が変化したとは言えないことが分かります。 \square