

問題 1 ブランデーの含有成分を調べる実験で、6 種類のブランデーについて、次のようなタンニン酸含有量とエステル含有量（いずれも 100 プルーフ濃度検算での 100 リットルあたりグラム表示）を得ました：

タンニン酸 X	19	15	9	10	11	19
エステル Y	31.7	32.3	8.5	14.3	14.0	17.8

以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい（近似はせず分数で答えること）。
- (2) X, Y の共分散を求め（近似はせず分数で答えること）、 Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、タンニン酸の含有量が 12 であるようなブランデーのエステル量を推定して下さい（小数点以下 2 桁目を四捨五入して小数点以下 1 桁目までの近似値としてください）。

配点：(1)40 点、(2)5 点

シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{19 + 15 + 9 + 10 + 11 + 19}{6} = \frac{83}{6}$$

$$E[Y] = \frac{31.7 + 32.3 + 8.5 + 14.3 + 14.0 + 17.8}{6} = \frac{118.6}{6} = \frac{59.3}{3}$$

19

×) 19

171

19

361

15

×) 15

75

15

225

9

×) 9

81

9

181

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= \frac{19^2 + 15^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 19^2}{6} - \left(\frac{83}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1249}{6} - \frac{6889}{36} \\ &= \frac{605}{36} \end{aligned}$$

(2)

31.7

×)

2853

317

602.3

32.3

×)

1615

323

484.5

14

×)

11

14

154

17.8

×)

1602

178

338.2

118.6

×)

3558

9488

9843.8

回帰直線は

$$y - \frac{59.3}{3} = \frac{\frac{947.2}{36}}{\frac{605}{36}} \left(x - \frac{83}{6} \right)$$

ですから、 x に 12 を代入すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{947.2}{605} \left(12 - \frac{83}{6} \right) + \frac{59.3}{3} \\ &= -\frac{947.2}{605} \cdot \frac{11}{6} + \frac{59.3}{3} \\ &= -\frac{947.2}{330} + \frac{59.3}{3} \\ &= \frac{6523 - 947.2}{330} \\ &= \frac{5575.8}{330} \\ &\approx 16.9 \end{aligned}$$

です。

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{19 \cdot 31.7 + 15 \cdot 32.3 + 9 \cdot 8.5 + 10 \cdot 14.3 + 11 \cdot 14.0 + 19 \cdot 17.8}{6} - \frac{83}{6} \frac{118.6}{6} \\ &= \frac{1798.5}{6} - \frac{9843.8}{36} \\ &= \frac{947.2}{36} \\ &= \frac{236.8}{9} \end{aligned}$$

59.3

×)

593

593

6523

6523

−)

947.2

5575.8

16.89

330)

557

330

2275

1980

2958

2640

3180

2970

□

問題 2 密度関数が次の $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{5\pi}{3}]$ を求めてください。

配点：10 点

シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{5\pi}{3}\right] &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{3}} h(x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{1}{2} \sin x \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2} \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

□

問題 3 令和 5 年度大学入学共通テストの国語の受験者数は 45 万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 105.7、標準偏差（分散の正の平方根）が 34.1 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。得点が 150 点だった受験者の順位はだいたい何位くらいでしょうか。

配点：10 点

シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】 得点の全体を表す確率変数 X は正規分布 $N(105.7, 34.1^2)$ で近似されます。150 点より高得点の人が何人いたかを見るために、 $P[150 < X]$ を調べます。

$$\begin{aligned} P[150 < X] &\approx P[150 < N(105.7, 34.1^2)] \\ &= P\left[\frac{150 - 105.7}{34.1} < N(0, 1)\right] \\ &\approx P[1.299 < N(0, 1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.299] \\ &\approx 0.5 - 0.4032 \\ &= 0.0968 \end{aligned}$$

従って、その人数は

$$0.0968 \times 450000 = 43560$$

ですから、150 点の人は、おおよそ 43560 位であることが分かります。

$P[150 < X \leq 200]$ で計算した場合は

$$\begin{aligned} P[150 < X \leq 200] &\approx P[150 < N(105.7, 34.1^2) \leq 200] \\ &= P\left[\frac{150 - 105.7}{34.1} < N(0, 1) \leq \frac{200 - 105.7}{34.1}\right] \\ &\approx P[1.299 < N(0, 1) \leq 2.765] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) \leq 2.765] - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.299] \\ &\approx 0.4972 - 0.4032 \\ &= 0.094 \end{aligned}$$

従って、その人数は

$$0.0968 \times 450000 = 42300$$

ですから、150 点の人は、おおよそ 42300 位であることが分かります。

$P[151 \leq X]$ を求めた場合は

$$\begin{aligned} P[151 \leq X] &\approx P[151 \leq N(105.7, 34.1^2)] \\ &= P\left[\frac{151 - 105.7}{34.1} \leq N(0, 1)\right] \\ &\approx P[1.328 < N(0, 1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.33] \\ &\approx 0.5 - 0.4082 \\ &= 0.0918 \end{aligned}$$

従って、その人数は

$$0.0918 \times 450000 = 41310$$

ですから、150 点の人は、おおよそ 41311 位であることが分かります。

□

半整数補正をした場合は、 $P[150.5 < X]$ を求めることになり、

$$\begin{aligned} P[150.5 < X] &\approx P[150.5 < N(105.7, 34.1^2)] \\ &= P\left[\frac{150.5 - 105.7}{34.1} < N(0, 1)\right] \\ &\approx P[1.31 < N(0, 1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.31] \\ &\approx 0.5 - 0.4049 \\ &= 0.0951 \end{aligned}$$

従って、その人数は

$$0.0951 \times 450000 = 42795$$

ですから、150 点の人は、おおよそ 42795 位であることが分かります。

問題 4 確率変数 X が正規分布 $N(13.4, 6.1^2)$ に従うときに $P[a \leq X] = 0.3483$ となるような a を求めてください。

配点：15 点 シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】

$$\begin{aligned} 0.3483 &= P[a \leq N(13.4, 6.1^2)] \\ &= P\left[\frac{a - 13.4}{6.1} \leq N(0, 1)\right] \end{aligned}$$

ですが、確率が 0.5 より小さいので $a - 13.4 > 0$ であって、

$$\begin{aligned} 0.5 - 0.3483 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{a - 13.4}{6.1}\right] \\ 0.1517 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{a - 13.4}{6.1}\right] \end{aligned}$$

ですから、標準正規分布表により

$$\frac{a - 13.4}{6.1} \approx 0.39 \quad \text{従って} \quad a = 15.779$$

です。

□

問題 5 次の 2 つの関数 $f(x), g(x)$ のたたみ込み $(f * g)(x)$ を計算してください：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：10 点 シラバス到達目標：イ、オ

【解答例】

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy = \int_1^2 f(x - y)dy$$

ですが、被積分関数が 0 でない範囲は

$$0 \leq x - y \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad x - 1 \leq y \leq x$$

であり、この範囲と積分範囲の重なり具合が問題となります。

【 $x \leq 1$ の場合】2 つの区間は重ならないため、積分は 0 です。 $(f * g)(x) = 0$ 。

【 $1 \leq x \leq 2$ の場合】2 つの区間は $[1, x]$ で重なっており、

$$(f * g)(x) = \int_1^x dy = x - 1.$$

【 $2 \leq x \leq 3$ の場合】この場合は重なりは $[x - 1, 2]$ ですから、

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^2 dy = 3 - x.$$

【 $3 \leq x$ の場合】2 つの区間は重ならないため、積分は 0 です。 $(f * g)(x) = 0$ 。

以上から、たたみ込みは以下の関数です：

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & 3 \leq x \end{cases}$$

問題 6 xy 平面の長方形 $[1, 2] \times [2, 3]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて、曲面 $z = 6x^2y + 2y$ を屋根とした立体の体積を求めてください。

配点：10 点

シラバス到達目標：オ

□ 【解答例】 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_2^3 \left\{ \int_1^2 (6x^2y + 2y) dx \right\} dy \\ &= \int_2^3 [2x^3y + 2yx]_1^2 dy \\ &= \int_2^3 16y dy \\ &= [8y^2]_2^3 \\ &= 40 \end{aligned}$$

です。 □