3　正規分布

3.1　密度関数の特徴付け

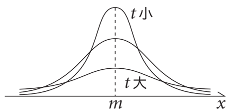
$$h(x) \text{ は } X \text{ の密度関数} \iff P[X \leq c] = \int_{-\infty}^{c} h(x)dx \quad \text{(for all } c\text{)} \tag{3.1}$$

3.2　正規分布

定義 3.2.1 任意の実数 m と任意の正の実数 t に対して、密度関数が

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2t}}$$

である様な確率変数は平均 m、分散 t の正規分布に従っていると言い、この分布を記号 $N(m,t)$ で表します。特に平均 0、分散 1 のものは標準正規分布と呼ばれます。



3.2.1　標準化

$$Var[aX+b] = a^2 Var[X], \quad Var\left[\frac{X-E[X]}{\sqrt{Var[X]}}\right] = \frac{Var[X-E[X]]}{Var[X]} = 1.$$

確率変数 X が $N(m,t)$ に従うとき $\frac{X-m}{\sqrt{t}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従います。

3.2.2　標準正規分布表

正規分布の確率計算は、結局次の形さえ計算しておけば全ての場合に対応出来ます：

$$P[0 \leq N(0,1) \leq z] = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

これを数表にしたものがいわゆる標準正規分布表です。

問題 3.2.2 X が平均 4、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して確率 $P[6 \leq X \leq 9]$ を求めて下さい。

$$\begin{aligned} P[6 \leq X \leq 9] &= P[6 \leq N(4,4) \leq 9] \\ &= P\left[1 \leq N(0,1) \leq \frac{5}{2}\right] \\ &= P[0 \leq N(0,1) \leq 2.5] - P[0 \leq N(0,1) \leq 1] \end{aligned}$$

$$P[6 \leq X \leq 9] \approx 0.4938 - 0.3413 = 0.1525$$

□

問題 3.2.3 [高専教科書　例題 15.3] ある試験を 30000 人の受験者が受けました。100 点満点のところ平均点が 63.6、標準偏差が 13.4、点数の分布はほぼ正規分布でした。
(1) 80 点の受験者は約何番でしょうか。　(2) 10000 番の受験者は約何点でしょうか。

---

(1) 得点を表す確率変数 X は正規分布 $N(63.6, 13.4^2)$ に従っていると仮定します。すると求めるべきものは 80 点より高得点の人が何人いるかであり、それは $P[80 < X]$ を求め、これに 30000 を掛ける事によって概算出来ます。これは

$$P[80 < X] = P\left[\frac{80-63.6}{13.4} < \frac{X-63.6}{13.4}\right] = P[1.22 < N(0,1)] = 0.5 - P[0 \leq N(0,1) \leq 1.22]$$

ですから正規分布表から $P[80 < X] = 0.5 - 0.3888 = 0.1112$ が得られ、これに受験者総数の 30000 を掛けて 80 点より高得点の人が大体 3336 人だと分かります。従って 80 点の人は大体 3300 番程度であると考えられます。

(2) a 点以上の人が 10000 人居るとします。すると

$$\frac{10000}{30000} = P[a \leq X] = P\left[\frac{a-63.6}{13.4} \leq \frac{X-63.6}{13.4}\right] = P\left[\frac{a-63.6}{13.4} \leq N(0,1)\right]$$

ですが、a 点は平均点以上であると考えられますから

$$0.3333 \approx 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{a-63.6}{13.4}\right]$$

$$0.1667 \approx P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{a-63.6}{13.4}\right]$$

となって正規分布表から $\frac{a-63.6}{13.4} \sim 0.43$、すなわち $a \sim 69.4$ が得られ、10000 番の受験者は大体 69 点であることが分かります。□

3.3 問題演習

基本演習 3.1 [高専教科書 問題 15.3] X が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して次の確率を求めて下さい。

(2) $P[3 \leq X \leq 8]$ (3) $P[X \leq 10]$

基本演習 3.2 [高専教科書 問題 15.2] Z が標準正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して次の条件を満たす t の値を求めて下さい。

(2) $P[-t \leq Z \leq t] = 0.99$ (3) $P[Z \leq t] = 0.025$

基本演習 3.3 Z が標準正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照することによって条件 $P[Z \geq t] = 0.015$ を満たす t の値を求めて下さい。

基本演習 3.4 ある試験を 30000 人の受験者が受けました。100 点満点のところ平均点が 63.6、標準偏差が 13.4、点数の分布はほぼ正規分布でした。

(1) 40 点の受験者はだいたい上から何番目ですか。

(2) 12000 番の受験者の得点はだいたい何点ですか。

発展演習 3.5 ある確率変数 X の密度関数が連続関数 $h(x)$ だったとします。このとき $h(x)$ は任意の x に対して $h(x) \geq 0$ を満たしており、また $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 1$ でもある事を示して下さい。

発展演習 3.6 X が標準正規分布 $N(0,1)$ に従う時、$E[X^3] = 0$ であることを示して下さい。また、一般に $E[X^n]$ はどうなるかいろいろ計算してみて下さい。

発展演習 3.7 確率変数 X が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、X^2 はどんな密度関数をもつでしょうか。

発展演習 3.8 X の密度関数が $h(x)$ であるとき、$Y = 2X - 3$ の密度関数を $h(x)$ を使って表して下さい。

発展演習 3.9 X の密度関数が $h(x)$ であるとき、$Y = X^2$ の密度関数を $h(x)$ を使って表して下さい。

発展演習 3.10 Gauss 積分を使って、正規分布 $N(m,t)$ の平均値が m であり、分散が t である事を示して下さい。

標準正規分布表

$$P[0 \leq N(0,1) \leq z] = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998