

## 5 多次元の確率変数

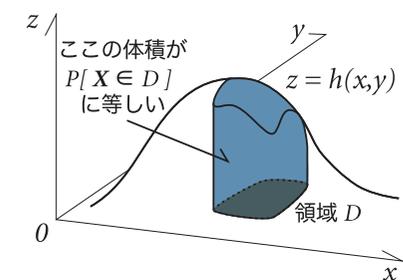
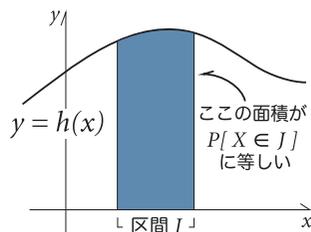
多次元のデータを（くじ引きとしての）確率変数と解釈したものは多次元の確率変数と呼ばれます。つまり、某かのランダムネスによって様々な多次元の実数値（ベクター値）をとり得る関数／変数のようなものを多次元の確率変数と言います。

### 5.1 密度関数とは何だったか

1次元の確率変数  $X$  とその密度関数  $h(x)$  は（任意の区間  $J$  に対して）

$$P[X \in J] = \int_J h(x) dx$$

と云う関係で結ばれていましたがこの積分値は右図の様に面積と考える事が出来ます。



2次元の確率変数  $\mathbb{X}$  に対しても同様に考えれば、ある非負値2変数関数  $h(x, y)$  があって、任意の領域  $D$  に対して  $\mathbb{X}$  が  $D$  に入っている確率  $P[X \in D]$  が、左図の様な曲面  $z = h(x, y)$  と  $xy$ -平面に挟まれた部分のうち領域  $D$  の『上空』の部分に相当する立体の体積で与えられる場合に  $\mathbb{X}$  の密度が  $h(x, y)$  であると言う事が出来ます。

この体積に言及するたびにいちいち言葉で言い表すのも面倒ですから、次のような記号を使う事にします：

$$\left( \begin{array}{l} \text{領域 } D \text{ を床とし、この領域の境界線上に垂直な} \\ \text{壁を立て、曲面 } z = h(x, y) \text{ を屋根とした立体の体積} \end{array} \right) = V_D(h)$$

すると2次元の確率変数の密度関数は次の様に特徴付けられます：

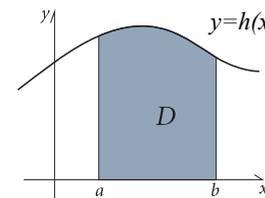
定義 5.1.1 2変数非負値関数  $h(x, y)$  が2次元の確率変数  $\mathbb{X}$  の密度関数であると、任意の領域  $D$  に対して次が成り立つこととします：

$$P[\mathbb{X} \in D] = V_D(h).$$

ここで、正確には『任意の領域』ではなく『任意の「良い」領域』としなければなりません、どう云うものを『良い』と呼ぶのか定義するだけでも結構大変ですし、現実的に皆さんが考えつくような『領域』は大抵の場合『良い領域』になっていますので、まあ、『任意の領域』としてもそれほど間違いではないでしょう。

### 5.2 体積の計算

区間  $[a, b]$  を床とし、その端点に垂直な直線を立て、関数  $h(x)$  のグラフを屋根とした領域の面積は周知の通り積分  $\int_a^b h(x) dx$  で計算されます（右図）。図形的な言葉で言えば、被積分関数は領域を  $x$ -軸に垂直に切ったときの切り口の幅になっており、従って、『面積は切り口の長さを積分して得られる』と言う事が出来ます。



$$(\text{面積}) = \int (x\text{-軸に垂直に切った切り口の長さ}) dx$$

従ってこれを1つ上の次元に拡張すれば、立体の体積は断面積を積分する事によって得られると考えられます。その際、 $x$ -軸に垂直にスライスしても  $y$ -軸に垂直にスライスしても、求まる体積は同じ値になるはずで。

$$\begin{aligned} (\text{体積}) &= \int (x\text{-軸に垂直に切った断面の面積}) dx \\ &= \int (y\text{-軸に垂直に切った断面の面積}) dy \end{aligned}$$

$z$ -軸に垂直でも良いんですが、ここでは省きます。

### 5.3 体積の具体的な計算例

問題 5.3.1 長方形  $[0, 1] \times [1, 2]$  を領域  $R$  とし、 $h(x, y) = x^2y$  とします。このとき立体の体積  $V_R(h)$  を求めて下さい。

まず最初にこの立体を  $x$ -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えます。

$x$ -座標が  $x$  である平面で切った時、まず床である領域  $R$  は  $x$ -座標が一定値  $x$  である直線によって切断され、この切り口は  $y$ -座標で言って  $1 \leq y \leq 2$  の範囲になっています。従って断面の断面積は

$$(\text{断面積}) = \int_1^2 x^2y \, dy = \left[ \frac{1}{2}x^2y^2 \right]_1^2 = \frac{3}{2}x^2$$

である事が分かり、この断面積を  $x$  で  $[0, 1]$  の範囲で積分すれば体積が求められます：

$$V_R(h) = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 \, dx = \left[ \frac{1}{2}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

今度は切る方向を変えて  $y$  軸に垂直な平面群でスライスしてみましょう。 $y$ -座標が  $y$  である平面で切った時、まず床である領域  $R$  は  $y$ -座標が一定値  $y$  である直線によって切断され、この切り口は  $x$ -座標で言って  $0 \leq x \leq 1$  の範囲になっています。従って断面の断面積は

$$(\text{断面積}) = \int_0^1 x^2y \, dx = \left[ \frac{1}{3}x^3y \right]_0^1 = \frac{1}{3}y$$

である事が分かります。この断面積を  $1 \leq y \leq 2$  の範囲で積分すれば体積が求められ：

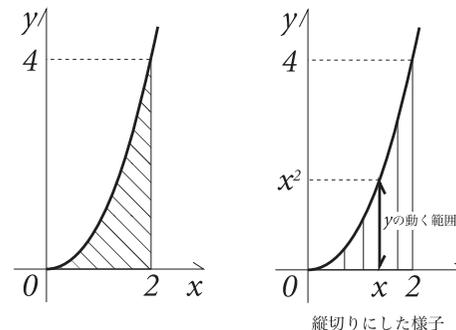
$$V_R(h) = \int_1^2 \frac{1}{3}y \, dy = \left[ \frac{1}{6}y^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

さっきと同じ値になります。 □

問題 5.3.2 不等式  $0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 2$  の表す領域を  $D$  とし、 $h(x, y) = x^2y$  とします。このとき体積  $V_D(h)$  を求めて下さい。

まずはこの立体を  $x$ -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えます。

領域  $D$  を図示すると右図のようになっています。立体を  $x$ -座標が  $x$  である平面で切った時、まず床である領域  $D$  は  $x$ -座標が一定値  $x$  である直線によって切断され、この切り口は  $y$ -座標で言って  $0 \leq y \leq x^2$  の範囲になっています (右図右参照)。

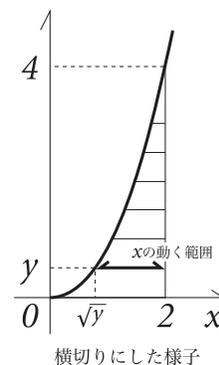


従って断面の断面積は

$$(\text{断面積}) = \int_0^{x^2} x^2y \, dy = \left[ \frac{1}{2}x^2y^2 \right]_0^{x^2} = \frac{1}{2}x^6$$

である事が分かり、この断面積を  $x$  で  $[0, 2]$  の範囲で積分すれば体積が求められます：

$$V_D(h) = \int_0^2 \frac{1}{2}x^6 \, dx = \left[ \frac{1}{14}x^7 \right]_0^2 = \frac{64}{7}.$$



今度は  $y$  軸に垂直な平面群でスライスしてみましょう。立体を  $y$ -座標が  $y$  である平面で切った時、まず床である領域  $D$  は  $y$ -座標が一定値  $y$  である直線によって切断され、切り口は下図の様に  $x$ -座標で言って  $\sqrt{y} \leq x \leq 2$  の範囲になっています。また、スライスする範囲は  $0 \leq y \leq 4$  の範囲になっています。要するに領域  $D$  は不等式  $\sqrt{y} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$  でも表せると云う事です。

この場合の断面積は

$$(\text{断面積}) = \int_{\sqrt{y}}^2 x^2y \, dx = \left[ \frac{1}{3}x^3y \right]_{\sqrt{y}}^2 = \frac{8}{3}y - \frac{1}{3}y^{\frac{5}{2}}$$

ですから、これを  $0 \leq y \leq 4$  の範囲で積分すれば体積が求められ：

$$(\text{体積}) = \int_0^4 \left( \frac{8}{3}y - \frac{1}{3}y^{\frac{5}{2}} \right) \, dy = \left[ \frac{4}{3}y^2 - \frac{2}{21}y^{\frac{7}{2}} \right]_0^4 = \frac{64}{3} - \frac{256}{21} = \frac{64}{7}$$

やはり同じ値になります。 □

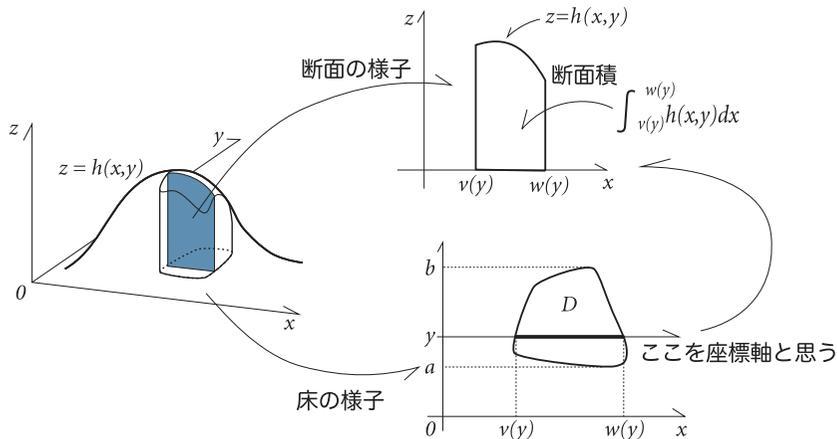
### 5.4 一般的な話

領域  $D$  を床、曲面  $z = h(x, y)$  を屋根とした立体の体積  $V_D(h)$  を一般的に考えてみましょう。

問題の立体を例えば  $y$ -軸に垂直な平面 ( $y$ -座標一定の平面) 群でスライスした時、床である領域  $D$  は  $xy$ -平面内で  $y$  座標一定の直線によって切られる事になり、その1本1本を  $x$  座標で見ると  $v(y) \leq x \leq w(y)$  の範囲であったとします (範囲は  $y$  の一定値によって違はずですから  $y$  の関数として表されています)。これは領域  $D$  が不等式:

$$\begin{cases} v(y) \leq x \leq w(y) \\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

で表されると云う事です (下図のうち右下のもの参照)。



このとき切り口の断面積は上図の右上の様に  $x$  の1変数関数  $z = h(x, y)$  の積分:

$$(\text{断面積}) = \int_{v(y)}^{w(y)} h(x, y) dx$$

で計算され、これを  $y$  の範囲  $a \leq y \leq b$  で積分すれば

$$(\text{全体の体積}) = \int_a^b \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} h(x, y) dx \right\} dy$$

が得られます。この様に立体の体積は2変数関数を1変数ずつ連続して2回積分する事 (累次積分あるいは逐次積分と言います) で求める事が出来ます。

事実 5.4.1 領域  $D$  が連立不等式:

$$D : \begin{cases} v(y) \leq x \leq w(y) \\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

で表されている時 (細かいことを言うと不十分ですがまあよし)、次が成り立つ:

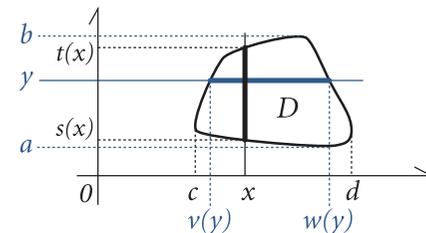
$$V_D(h) = \int_a^b \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} h(x, y) dx \right\} dy.$$

また、全く同様に今度は  $x$ -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えると、

$$(\text{全体の体積}) = \int_c^d \left\{ \int_{s(x)}^{t(x)} h(x, y) dy \right\} dx$$

断面積

$$D : \begin{cases} s(x) \leq y \leq t(x) \\ c \leq x \leq d \end{cases}$$



が得られます。当然これは先ほどと同じ値になります:

$$V_D(h) = \int_a^b \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} h(x, y) dx \right\} dy = \int_c^d \left\{ \int_{s(x)}^{t(x)} h(x, y) dy \right\} dx.$$

中辺と右辺を比べて分かる様に、体積の具体的計算は2つある変数のどちらを先に積分しても良いのですが、どちらを先に積分するかによって積分範囲は複雑に変わりますので注意が必要です。

ただし、特に領域  $D$  が長方形の場合にはどこで切っても切り口の範囲は変わりません。

これはつまり長方形は定数  $a, b, c, d$  によって右のように表せる事を意味しており、たて切りしてもよこ切りしても得られる不等式は全く同じものになってしまいます。つまり、

$$V_{[a,b] \times [c,d]}(h) = \int_c^d \left\{ \int_a^b h(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d h(x, y) dy \right\} dx$$

であって、積分順序交換は単純に積分範囲や  $dx, dy$  を交換するだけで OK なので扱い易い事が分かります。

### 5.5 密度関数の特徴付け

領域  $R$  が2つの (内部は重ならない) 長方形  $R_1, R_2$  をつなぎ合わせた形である場合、体積・確率ともに次のような『和の法則』をもっています：

$$V_R(h) = V_{R_1}(h) + V_{R_2}(h), \quad P[\mathbb{X} \in R] = P[\mathbb{X} \in R_1] + P[\mathbb{X} \in R_2]$$

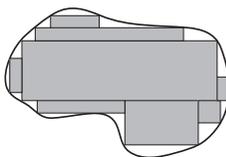
従って、密度関数を特徴付ける次の命題：

命題 F： $P[\mathbb{X} \in R] = V_R(h)$

が長方形領域  $R$  に対して成り立てば、2つの長方形を合わせてできる領域  $R$  に対しても命題 F が成り立つ事が分かります。

もちろんつなぎ合わせる長方形の個数は2個でなくても3個でも良いわけです。任意の有限個で良いでしょうし、極限をとれば可算無限個でも良いでしょう。

また、どんな領域も幾つかの大小様々の長方形をつなぎ合わせた図形で近似できますから (正確には嘘で、そうやって近似できる『よい領域』だけを考えると云う事です)、結局の所任意の長方形領域  $R$  に対して命題 F が成り立てば任意の領域  $D$  に対しても命題 F が成り立つと言えます。



2次元の確率変数  $\mathbb{X}$  は2次元の実数値、即ち2次元のベクトル値をとるわけですが、その第1成分だけを取り出せばこれは1次元の確率変数と考えられます。第2成分も同様ですのでそれぞれの成分確率変数を  $X, Y$  としましょう。このとき2次元の実数と言う意味で  $\mathbb{X} = (X, Y)$ 、あるいは2次元の点をその位置ベクトルと同一視する事によって  $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  などと書きます。長方形領域に対する命題 F に基づけば、2次元の確率変数の密度関数は次の様に特徴付ける事が出来ます：

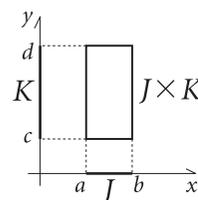
**定義 5.5.1**  $\mathbb{X} = (X, Y)$  を2次元の確率変数、 $h(x, y)$  を非負値関数とします。任意の  $a \leq b, c \leq d$  に対して

$$P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = P[\mathbb{X} \in [a, b] \times [c, d]] = V_{[a,b] \times [c,d]}(h)$$

が成り立っているとき、関数  $h(x, y)$  を  $\mathbb{X} = (X, Y)$  の密度関数と言います。

上で新しい (かも知れない) 記号を使いました。

区間  $J = [a, b], K = [c, d]$  に対し、長方形領域  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  を直積記号  $J \times K = [a, b] \times [c, d]$  を使って表します：



$$\begin{aligned} (x, y) \in J \times K &\Leftrightarrow x \in J, y \in K \\ &\Leftrightarrow x \in [a, b], y \in [c, d] \\ &\Leftrightarrow a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \end{aligned}$$

$J, K$  が区間でなくても同様に直積記号を使います。

### 5.6 多次元の密度から成分の密度を得る事

2次元の確率変数  $(X, Y)$  の密度関数が  $h(x, y)$  であるとき、各成分確率変数  $X, Y$  それぞれの密度はどうなっているか見てみます。

$v \leq X \leq w$  であると言う事は、2次元の確率変数  $(X, Y)$  としては  $Y$  の方はどんな値でも良いわけですから  $(X, Y) \in [v, w] \times (-\infty, \infty)$  であると考えられ、

$$P[v \leq X \leq w] = P[(X, Y) \in [v, w] \times (-\infty, \infty)] = \int_v^w \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \right\} dx$$

となります。これは2変数関数  $h(x, y)$  を  $y$  で積分して出来る  $x$  の関数  $\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy$  が  $X$  の密度である事を意味しています。全く同様に  $Y$  の密度は  $\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx$  です。

この様に、多次元の密度 (同時密度と言います) が分かれば、各成分ごとの1次元確率変数の密度 (周辺密度と言います) も積分計算によって分かってしまいます。

### 5.7 確率変数の独立性と成分の密度から多次元の密度を得る事

$X, Y$  が共に  $[0, 1]$  区間上に一様に分布していたとしても、 $X = Y$  であれば  $(X, Y)$  は対角線  $y = x$  上にしか分布しませんが、 $X$  と  $Y$  が無関係であれば長方形  $[0, 1] \times [0, 1]$  全体に分布しています。この様に、2次元の確率変数において各成分の分布が分かっても成分同士の相互関係が分からなければ全体としての2次元分布は分かりません。

確率変数  $X_1, \dots, X_n$  のそれぞれがどの程度の値をとるかと言う事柄同士が無関係であるとき、これらは独立であると言います。正確には  $X_1, \dots, X_n$  の独立性は、各  $X_j$  が区間  $J_j$  に含まれると言う事象同士の独立性によって次の様に定義されます：

**定義 5.7.1**  $X_1, \dots, X_n$  は確率変数とします。任意の区間  $J_1, \dots, J_n$  に対して、事象のファミリー  $\{X_k \in J_k\}_{k=1}^n$  が独立であるとき、確率変数のファミリー  $X_1, \dots, X_n$  は独立 (independent) であると言います。

これは言い換えれば、 $J_k = (-\infty, \infty)$  の場合も含めて考える事によって、任意の区間  $J_1, \dots, J_n$  に対して

$$P[X_1 \in J_1, \dots, X_n \in J_n] = P[X_1 \in J_1] \cdots P[X_n \in J_n]$$

を満たすとき独立であるということも出来ます。

$X, Y$  が独立であってそれぞれ密度  $f(x), g(y)$  をもつ場合は、その独立性から

$$\begin{aligned} P[(X, Y) \in J \times K] &= P[X \in J]P[Y \in K] \\ &= \int_J f(x)dx \cdot \int_K g(y)dy \\ &= \int_K \left\{ \int_J f(x)g(y) dx \right\} dy \\ &= \int_{J \times K} f(x)g(y) \end{aligned}$$

となりますから、2次元の確率変数  $\mathbb{X} = (X, Y)$  の密度は各成分の密度の積  $f(x)g(y)$  になっている事が分かります (3次元以上の場合も同様)。

**事実 5.7.2** 独立な成分をもった多次元確率変数の密度関数は、各成分の密度関数の積になります。

## 5.8 問題演習

**基本演習 5.1**  $xy$ -平面内の正方形  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  を領域  $D$  とします。  $D$  の周囲に垂直な壁を立て、曲面  $z = 2 - x^2 - y^2$  を屋根とする立体の体積  $V_D(2 - x^2 - y^2)$  を求めて下さい。

**基本演習 5.2**  $xy$ -平面内の不等式  $0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1$  の表す領域を  $D$  とします。体積  $V_D(x^2 + 2y)$  を求めて下さい。

**基本演習 5.3**  $xy$ -平面内の不等式  $-x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2$  の表す領域を  $D$  とします。体積  $V_D(x^2y^2)$  を求めて下さい。

**発展演習 5.4** 半径  $r > 0$  の球の体積を計算して下さい。スライスして断面積を積分すれば良いでしょう。

**発展演習 5.5** 長方形領域  $D : [0, 1] \times [1, 3]$  上に一様に分布した確率変数の密度関数を求めて下さい。

**発展演習 5.6** 確率変数  $\mathbb{X}$  の密度関数が

$$h(x, y) = \begin{cases} 5xy^2 + 3x & (x, y) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad D : \begin{cases} x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

であるとき、確率  $P[\mathbb{X} \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]]$  を求めて下さい。

**発展演習 5.7** 2次元の確率変数  $Z = (X, Y)$  は密度関数  $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$  をもつとします。このとき各成分確率変数  $X, Y$  の密度関数を求め、また、 $X, Y$  が独立であるかどうか調べて下さい。

**発展演習 5.8** 3つの事象  $A, B, C$  のうちの2つの組 (例えば  $\{A, B\}$  など) も独立であるが、 $\{A, B, C\}$  は独立でないような例を作って下さい。

要するに、

$$P[A \cap B] = P[A]P[B], \quad P[B \cap C] = P[B]P[C], \quad P[C \cap A] = P[C]P[A]$$

は成り立つけれども  $P[A \cap B \cap C] \neq P[A]P[B]P[C]$  であるような例を挙げて下さい。

また、逆に、 $P[A \cap B \cap C] = P[A]P[B]P[C]$  は成り立つけれども  $P[A \cap B] \neq P[A]P[B]$  であるような例を挙げて下さい。

## 問題演習解答

## 基本演習 5.1

$$\begin{aligned}
 V_D(2 - x^2 - y^2) &= \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 (2 - x^2 - y^2) dy \right\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ 2y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-1}^1 dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left\{ 2 \cdot (1+1) - x^2(1+1) - \frac{1}{3}(1+1) \right\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left( \frac{10}{3} - 2x^2 \right) dx \\
 &= \left[ \frac{10}{3}x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{10}{3}(1+1) - \frac{2}{3}(1+1) \\
 &= \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

## 基本演習 5.2

$$\begin{aligned}
 V_D(x^2 + 2y) &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{x^2} (x^2 + 2y) dy \right\} dx \\
 &= \int_0^1 [x^2 y + y^2]_0^{x^2} dx \\
 &= \int_0^1 2x^4 dx \\
 &= \left[ \frac{2}{5}x^5 \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

## 基本演習 5.3

$$V_D(x^2 y^2) = \int_0^2 \left\{ \int_{-x}^x x^2 y^2 dy \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \left[ \frac{1}{3} x^2 y^3 \right]_{-x}^x dx \\
 &= \int_0^2 \frac{2}{3} x^5 dx \\
 &= \left[ \frac{1}{9} x^6 \right]_0^2 \\
 &= \frac{64}{9}
 \end{aligned}$$

発展演習 5.4  $\frac{4\pi}{3}r^3$ .発展演習 5.5 求める関数を  $f(x, y)$  とすると

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x, y) \in [0, 1] \times [1, 3] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

発展演習 5.6

$$\begin{aligned}
 P \left[ X \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \times \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \right] &= \iint_{D \cap [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]} (5xy^2 + 3x) dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{\frac{1}{2}} (5xy^2 + 3x) dy dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{5}{3}xy^3 + 3xy \right]_x^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{5}{24}x + \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}x^4 - 3x^2 \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{41}{24}x - \frac{5}{3}x^4 - 3x^2 \right) dx \\
 &= \left[ \frac{41}{48}x^2 - \frac{1}{3}x^5 - x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{41}{192} - \frac{1}{96} - \frac{1}{8} \\
 &= \frac{15}{192} \\
 &= \frac{5}{64}
 \end{aligned}$$

**発展演習 5.7**

$X$  の密度関数は  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 、 $Y$  の密度関数は  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$ 。独立。

**発展演習 5.8**

【前半】例えば 112,121,211,222 と書かれた 4 枚のカードが入った袋を考えてこの袋の中から 1 枚のカードを引いた時に次の 3 つの事象を考えれば良い：

事象  $A$  一番左の数字が 1 である

事象  $B$  真ん中の数字が 1 である

事象  $C$  一番右の数字が 1 である

【後半】例えば赤、青 2 つのサイコロを振った時に次の 3 つの事象を考えれば：

事象  $A$  赤サイコロの出目が 1、2、3 のいずれか

事象  $B$  赤サイコロの出目が 3、4、5 のいずれか

事象  $C$  2 つのサイコロの出目の和が 9

題意を満たすでしょう。