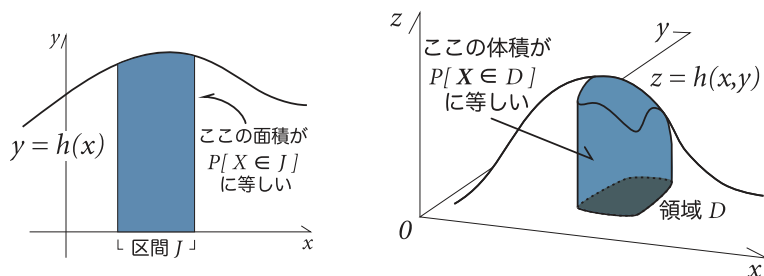


5 多次元の確率変数

5.1 密度関数とは何だったか



定義 5.1.1 2変数非負関数 $h(x, y)$ が2次元の確率変数 $\mathbb{X}$ の密度関数であるとは、任意の領域 D に対して次が成り立つこととします：

$$P[\mathbb{X} \in D] = V_D(h).$$

ただし、

$$\left(\text{領域 } D \text{ を床とし、この領域の境界線上に垂直な壁を立て、曲面 } z = h(x, y) \text{ を屋根とした立体の体積} \right) = V_D(h)$$

5.2 体積の計算

$$(\text{体積}) = \int (x\text{-軸に垂直に切った断面積}) dx = \int (y\text{-軸に垂直に切った断面積}) dy$$

問題 5.2.1 長方形 $[0, 1] \times [1, 2]$ を領域 R とし、 $h(x, y) = x^2 y$ とします。このとき立体の体積 $V_R(h)$ を求めて下さい。

まず最初にこの立体を x -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えます。

$$(\text{断面積}) = \int_1^2 x^2 y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_1^2 = \frac{3}{2} x^2$$

$$V_R(h) = \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 dx = \left[\frac{1}{2} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

今度は y 軸に垂直な平面群でスライスしてみましょう。

$$(\text{断面積}) = \int_0^1 x^2 y dx = \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_0^1 = \frac{1}{3} y$$

$$V_R(h) = \int_1^2 \frac{1}{3} y dy = \left[\frac{1}{6} y^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

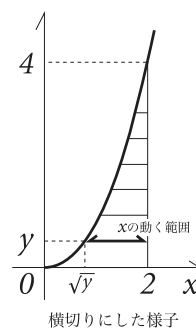
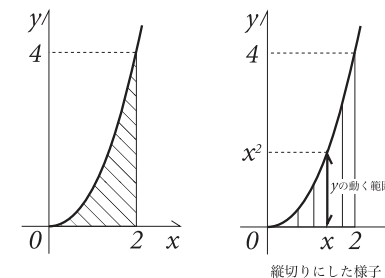
□

問題 5.2.2 不等式 $0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 2$ の表す領域を D とし、 $h(x, y) = x^2 y$ とします。このとき体積 $V_D(h)$ を求めて下さい。

まずはこの立体を x -軸に垂直な平面群でスライスする事を考えます。

$$(\text{断面積}) = \int_0^{x^2} x^2 y dy = \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^{x^2} = \frac{1}{2} x^6$$

$$V_D(h) = \int_0^2 \frac{1}{2} x^6 dx = \left[\frac{1}{14} x^7 \right]_0^2 = \frac{64}{7}.$$



$$(\text{断面積}) = \int_{\sqrt{y}}^2 x^2 y dx = \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{\sqrt{y}}^2 = \frac{8}{3} y - \frac{1}{3} y^{\frac{5}{2}}$$

$$V_D(h) = \int_0^4 \left(\frac{8}{3} y - \frac{1}{3} y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \left[\frac{4}{3} y^2 - \frac{2}{21} y^{\frac{7}{2}} \right]_0^4 = \frac{64}{7}$$

□

5.3 一般的な話

事実 5.3.1 領域 D が連立不等式: $D: \begin{cases} v(y) \leq x \leq w(y) \\ a \leq y \leq b \end{cases}$ で表されている時、次が成り立つ:

$$V_D(h) = \int_a^b \left\{ \int_{v(y)}^{w(y)} h(x, y) dx \right\} dy.$$

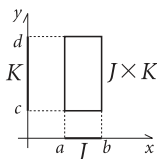
$$V_{[a,b] \times [c,d]}(h) = \int_c^d \left\{ \int_a^b h(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d h(x, y) dy \right\} dx$$

5.4 密度関数の特徴付け

定義 5.4.1 $\mathbb{X} = (X, Y)$ を 2次元の確率変数、 $h(x, y)$ を非負値関数とします。任意の $a \leq b, c \leq d$ に対して

$$P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = P[\mathbb{X} \in [a, b] \times [c, d]] = V_{[a,b] \times [c,d]}(h)$$

が成り立っているとき、関数 $h(x, y)$ を $\mathbb{X} = (X, Y)$ の密度関数と言います。



$$(x, y) \in J \times K \iff x \in J, y \in K \iff x \in [a, b], y \in [c, d]$$

5.5 多次元の密度から成分の密度を得る事

2次元の確率変数 (X, Y) の密度関数が $h(x, y)$ であるとき、各成分確率変数 X, Y それぞれの密度は $\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy, \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx$ です。

5.6 確率変数の独立性と成分の密度から多次元の密度を得る事

2次元の確率変数において各成分の分布が分かっても成分同士の相互関係が分かれば全体としての2次元分布は分かりません。

定義 5.6.1 $X_1, \dots, X_n$ は確率変数とします。任意の区間 $J_1, \dots, J_n$ に対して、事象のファミリー $\{X_k \in J_k\}_{k=1}^n$ が独立であるとき、確率変数のファミリー $X_1, \dots, X_n$ は独立 (independent) であると言います。

事実 5.6.2 独立な成分をもった多次元確率変数の密度関数は、各成分の密度関数の積になります。

5.7 問題演習

基本演習 5.1 xy -平面内の正方形 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ を領域 D とします。 D の周囲に垂直な壁を立て、曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$ を屋根とする立体の体積 $V_D(2 - x^2 - y^2)$ を求めて下さい。

基本演習 5.2 xy -平面内の不等式 $0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1$ の表す領域を D とします。体積 $V_D(x^2 + 2y)$ を求めて下さい。

基本演習 5.3 xy -平面内の不等式 $-x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 2$ の表す領域を D とします。体積 $V_D(x^2 y^2)$ を求めて下さい。

発展演習 5.4 半径 $r > 0$ の球の体積を計算して下さい。スライスして断面積を積分すれば良いでしょう。

発展演習 5.5 長方形領域 $D: [0, 1] \times [1, 3]$ 上に一様に分布した確率変数の密度関数を求めて下さい。

発展演習 5.6 確率変数 $\mathbb{X}$ の密度関数が

$$h(x, y) = \begin{cases} 5xy^2 + 3x & (x, y) \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad D: \begin{cases} x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

であるとき、確率 $P[\mathbb{X} \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]]$ を求めて下さい。