

6 独立な確率変数の和とたたみこみ

6.1 多次元の密度から成分の密度を得る事

2次元の確率変数 (X, Y) の密度関数が $h(x, y)$ であるとき、各成分確率変数 X, Y それぞれの密度はどうなっているか見てみます。

$v \leq X \leq w$ であると言う事は、2次元の確率変数 (X, Y) としては Y の方はどんな値でも良いわけですから $(X, Y) \in [v, w] \times (-\infty, \infty)$ であると考えられ、

$$P[v \leq X \leq w] = P[(X, Y) \in [v, w] \times (-\infty, \infty)] = \int_v^w \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \right\} dx$$

となります。これは2変数関数 $h(x, y)$ を y で積分して出来る x の関数 $\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy$ が X の密度である事を意味しています。全く同様に Y の密度は $\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx$ です。

この様に、多次元の密度（同時密度と言います）が分かれば、各成分ごとの1次元確率変数の密度（周辺密度と言います）も積分計算によって分かてしまいます。

6.2 確率変数の独立性と成分の密度から多次元の密度を得る事

X, Y が共に $[0, 1]$ 区間上に一様に分布していたとしても、 $X = Y$ であれば (X, Y) は対角線 $y = x$ 上にしか分布しませんが、 X と Y が無関係であれば長方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 全体に分布しています。この様に、2次元の確率変数において各成分の分布が分かっているても成分同士の相互関係が分からなければ全体としての2次元分布は分かりません。

確率変数 $X_1, \dots, X_n$ のそれぞれがどの程度の値をとるかと言う事柄同士が無関係であるとき、これらは独立であると言います。正確には $X_1, \dots, X_n$ の独立性は、各 X_j が区間 J_j に含まれると言う事象同士の独立性によって次の様に定義されます：

定義 6.2.1 $X_1, \dots, X_n$ は確率変数とします。任意の区間 $J_1, \dots, J_n$ に対して、事象のファミリー $\{X_k \in J_k\}_{k=1}^n$ が独立であるとき、確率変数のファミリー $X_1, \dots, X_n$ は独立 (independent) であると言います。

これは言い換えれば、 $J_k = (-\infty, \infty)$ の場合も含めて考える事によって、任意の区間 $J_1, \dots, J_n$ に対して

$$P[X_1 \in J_1, \dots, X_n \in J_n] = P[X_1 \in J_1] \cdots P[X_n \in J_n]$$

を満たすとき独立であると言うことも出来ます。

X, Y が独立であってそれぞれ密度 $f(x), g(y)$ をもつ場合は、その独立性から

$$\begin{aligned} P[(X, Y) \in J \times K] &= P[X \in J]P[Y \in K] \\ &= \int_J f(x) dx \cdot \int_K g(y) dy \\ &= \int_K \left\{ \int_J f(x) g(y) dx \right\} dy \\ &= \int_{J \times K} f(x) g(y) dy \end{aligned}$$

となりますから、2次元の確率変数 $\mathbb{X} = (X, Y)$ の密度は各成分の密度の積 $f(x)g(y)$ になっている事が分かります（3次元以上の場合も同様）。

事実 6.2.2 独立な成分をもった多次元確率変数の密度関数は、各成分の密度関数の積になります。

6.3 2次元確率変数から派生する確率変数の期待値

2次元の確率変数 (X, Y) が与えられた時、これを使って例えば $X + Y$ であるとか XY などの（1次元）確率変数を考える事が出来ます。この場合これら派生した確率変数の期待値は次のように計算されます：

定義 6.3.1 2次元の確率変数 (X, Y) の密度関数が $h(x, y)$ であるとき、右辺の積分が存在する様な良い関数 $w(x, y)$ に対して、

$$E[w(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) h(x, y) dx \right\} dy$$

を（派生した）確率変数 $w(X, Y)$ の期待値と言います。

6.3.1 独立な成分の積

確率変数 X, Y は独立であるとし、有限な平均・分散をもつものとしします。

このとき、 X, Y の密度をそれぞれ $f(x), g(x)$ とすれば (X, Y) の密度関数は積 $f(x)g(y)$ になりますから

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x)g(y)dx \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned}$$

が分かります。また、 $X - E[X]$ と $Y - E[Y]$ も独立ですから共分散は0です：

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[X - E[X]]E[Y - E[Y]] = 0$$

6.3.2 成分の和

任意の実数 a, b, c に対して

$$\begin{aligned} E[aX + bY + c] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by + c)h(x, y)dx \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} axh(x, y)dx \right\} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} byh(x, y)dx \right\} dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} ch(x, y)dx \right\} dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)dy \right\} dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)dx \right\} dy \\ &\quad + c \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)dx \right\} dy \\ &= aE[X] + bE[Y] + c \end{aligned}$$

となっている事が分かります。この様に和の期待値は期待値の和ですが、分散は、

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= E[(X + Y - E[X] - E[Y])^2] \\ &= E[(X - E[X])^2] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] + E[(Y - E[Y])^2] \\ &= \text{Var}[X] + 2\text{Cov}[X, Y] + \text{Var}[Y] \end{aligned}$$

となって和の分散は分散の和にはならない事が分かります。

しかしそうならない原因は式の通り共分散にあるわけですから、共分散が0になる、つまり、 X, Y の間に（線形）関係が全くなければ上手く行く様に思われます。

特に X, Y が独立であればさっき見た様に共分散は0ですから

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

と計算され、分散もそれぞれの分散の和になります。

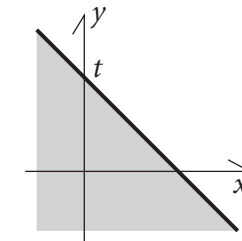
6.4 独立な確率変数の和とたたみこみ

成分が独立な2次元確率変数 $\mathbb{X} = (X, Y)$ を考えます。任意にとって固定した実数 t に対して、不等式 $x + y \leq t$ を満たす点 (x, y) の全体からなる領域を D_t とすれば

$$P[X + Y \leq t] = P[(X, Y) \in D_t]$$

ですが、領域 D_t は連立不等式：

$$\begin{cases} -\infty < x \leq t - y \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$



で表され、また前に見た様に $\mathbb{X}$ の密度は各成分の密度 $f(x), g(x)$ の積になったので、

$$\begin{aligned} P[X + Y \leq t] &= \int_{D_t} f(x)g(y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-y} f(x)g(y)dx \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{t-y} f(x)dx \right\} g(y)dy \end{aligned}$$

となります。中の積分に於いて $x = z - y$ と云う変数変換をすれば

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^t f(z - y)dz \right\} g(y)dy$$

となり、積分範囲が全て定数ですので長方形と考え、積分の順序を交換して

$$P[X + Y \leq t] = \int_{-\infty}^t \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y)g(y)dy \right\} dz$$

となります。従ってこの最後の括弧の中の $\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y)dy$ が $X+Y$ の密度に他なりません。そこで

定義 6.4.1 関数 f と g のたたみこみ (convolution) $f * g$ を次の様に定義します：

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

と定義すれば、互いに独立な2つの確率変数 X, Y の密度関数がそれぞれ $f(x), g(x)$ であるとき、 $X+Y$ の密度関数はたたみこみ $(f * g)(x)$ となる事が分かりました。

明らかな性質として、対称性 $f * g = g * f$ をもちます。

6.4.1 たたみこみの具体計算

問題 6.4.2 区間 $(0, 1)$ 上の一様分布の密度関数を $f(x)$ とするとき、たたみこみ $f * f$ を求めて下さい。

この一様分布の密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ですから、

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

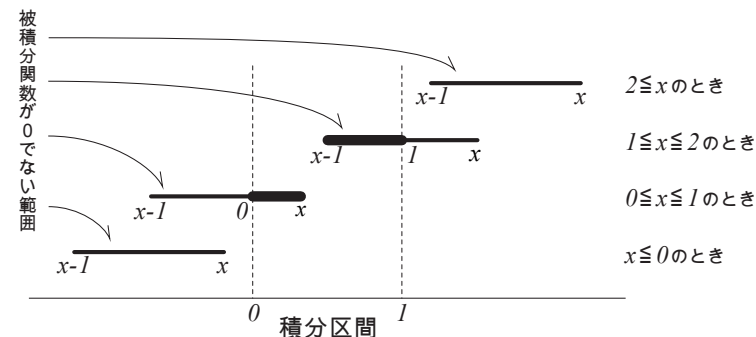
であり、まず被積分関数のうち第2因子 $f(y)$ の方を具体化すると

$$= \int_0^1 f(x-y)dy$$

となります。

次に残った部分を具体化するわけですが、定義により被積分関数は $0 < x-y < 1$ すなわち $x-1 < y < x$ である範囲以外では0となるのでこの範囲 $[x-1, x]$ が積分区間

$[0, 1]$ とどう交わるかが問題となります（区間の端点はあまり気にしないでいいです）。これを x の値によって場合分けするわけですが、数式オンリーでやっていると混乱しますから下図のような絵を描いて目で見て確認しながら考えると良いでしょう：



従って2つの区間が重なりをもつ場合にだけ実際の積分計算が出現して以下の通りになります：

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ \int_{x-1}^1 dy & 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^x dy & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -x+2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

これは三角分布ですね。

□

6.5 独立な正規分布の和

正規分布 $N(0, t)$ の密度を $N_t(x)$ として $N_1 * N_1$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} (N_1 * N_1)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2 - xy + \frac{x^2}{2})} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y - \frac{x}{2})^2} dy \end{aligned}$$

となります。更に $y - \frac{x}{2} = z$ と云う風に変数変換すれば、Gauß積分が出て来て

$$(N_1 * N_1)(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{x^2}{2}} = N_2(x)$$

が得られますから、丁度分散が $1 + 1 = 2$ の正規分布になっている事が分かります。

同様に計算すれば、一般の分散の場合も分散の和： $N_s * N_t = N_{s+t}$ となる事が分かります (演習問題)。

定理 6.5.1 それぞれ $N(m, s), N(n, t)$ に従う2つの独立な正規分布の和は正規分布 $N(m + n, s + t)$ に従います。

課題第2回

以下の問題を自分で考えて自筆にて解答してください。

課題 2.1 次の2つの関数のたたみ込み $(f * g)(x)$ を計算して下さい：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4A：

出題：令和6年11月12日

通常提出期限：令和6年11月19日 講義開始時

最終提出期限：令和6年11月20日 17時00分00秒

5E・4M：

出題：令和6年11月15日

通常提出期限：令和6年11月22日 講義開始時

最終提出期限：令和6年11月23日 17時00分00秒

6.6 問題演習

基本演習 6.1 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ とするとき、たたみ込み $f * f$ を求めて下さい。

基本演習 6.2 たたみ込みの対称性： $f * g = g * f$ を証明して下さい。

基本演習 6.3 区間 $[0, 1], [2, 4]$ それぞれの上の一様分布の密度関数を f, g とします。このときたたみ込み $f * g$ を求めて下さい。

基本演習 6.4 正規分布 $N(0, t)$ の密度関数を N_t で表します。 $N_s * N_t = N_{s+t}$ となる事を示して下さい。ただし Gauß積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は既知とします。

基本演習 6.5 2次元の確率変数 (X, Y) があり、 X, Y は独立であって X は $N(2, 1)$ 、 Y は $N(0, 1)$ に従っています。

(1) このとき $X + \sqrt{3}Y$ はどんな分布に従いますか。

(2) 確率 $P[4 \leq X + \sqrt{3}Y]$ を計算して下さい。

基本演習 6.6 2つの独立な確率変数 X, Y があって、 X は正規分布 $N(1, 4)$ 、 Y は正規分布 $N(0, 9)$ に従うとき、確率 $P[2X + Y \geq 7.65]$ を求めてください。

発展演習 6.7 次の三角分布の密度関数：

$$w(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に対してたたみ込み $w * w$ を計算して下さい。

発展演習 6.8 長方形領域 $D : [0, 1] \times [1, 3]$ 上に一様に分布した確率変数を (X, Y) とするとき、各成分確率変数 X, Y はどんな密度関数をもつか調べて下さい。

問題演習解答

基本演習 6.1 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ とするとき、たたみ込み $f * f$ を求めて下さい。

$$\begin{aligned}
 (f * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-y|} \frac{1}{2}e^{-|y|} dy \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^{-|x-y|} \frac{1}{2}e^y dy + \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-y|} \frac{1}{2}e^{-y} dy \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^x e^{y-x} e^y dy + \frac{1}{4} \int_x^0 e^{x-y} e^y dy + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{x-y} e^{-y} dy & x \leq 0 \\ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 e^{y-x} e^y dy + \frac{1}{4} \int_0^x e^{y-x} e^{-y} dy + \frac{1}{4} \int_x^{\infty} e^{x-y} e^{-y} dy & 0 \leq x \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_{-\infty}^x - \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{4} e^x \left[-\frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^{\infty} & x \leq 0 \\ \frac{1}{4} e^{-x} \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{4} x e^{-x} + \frac{1}{4} e^x \left[-\frac{1}{2} e^{-2y} \right]_x^{\infty} & 0 \leq x \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{8} e^x - \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{8} e^x & x \leq 0 \\ \frac{1}{8} e^{-x} + \frac{1}{4} x e^{-x} + \frac{1}{8} e^{-x} & 0 \leq x \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{4} (1-x) e^x & x \leq 0 \\ \frac{1}{4} (1+x) e^{-x} & 0 \leq x. \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

基本演習 6.2 たたみ込みの対称性： $f * g = g * f$ を証明して下さい。

【解答例】

$$\begin{aligned}
 (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \\
 &= \int_{\infty}^{-\infty} f(z) g(x-z) (-1) dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-z) f(z) dz = (g * f)(x).
 \end{aligned}$$

□

基本演習 6.3 区間 $[0, 1]$, $[2, 4]$ それぞれの上の一様分布の密度関数を f, g とします。
このときたたみ込み $f * g$ を求めて下さい。

【解答例】 まず

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

に注意します。たたみ込みは

$$\begin{aligned}
 (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \\
 &= \int_2^4 f(x-y) \frac{1}{2} dy
 \end{aligned}$$

ですが、この被積分関数が0でない範囲は $0 \leq x-y \leq 1$ 、すなわち $x-1 \leq y \leq x$ です。すなわち積分範囲内とこの範囲の重なり具合によって積分値が変わってきます。そこで x の値によって場合分けして考えましょう。

【 $x \leq 2$ の場合】 この場合2つの区間は重なりませんから積分値は0です。

【 $2 \leq x \leq 3$ の場合】 この場合、積分区間の中の区間 $[2, x]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから、積分値は

$$(f * g)(x) = \int_2^x \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(x-2)$$

となります。

【 $3 \leq x \leq 4$ の場合】 この場合、積分区間内の区間 $[x-1, x]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから、

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^x \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$$

です。

【 $4 \leq x \leq 5$ の場合】 この場合は積分区間内の区間 $[x-1, 4]$ においてのみ被積分関数がノンゼロですから

$$(f * g)(x) = \int_{x-1}^4 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}(-x+5)$$

【 $5 \leq x$ の場合】 この場合も 2 つの区間は重なりませんから積分値は 0 です。

以上からたたみ込みの結果は以下の通り：

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(x-2) & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2} & 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}(-x+5) & 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & 5 \leq x \end{cases}.$$

□

基本演習 6.4 正規分布 $N(0, t)$ の密度関数を N_t で表します。 $N_s * N_t = N_{s+t}$ となる事を示して下さい。ただし Gauß 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は既知とします。

【解答例】

$$\begin{aligned} (N_s * N_t)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t(x-y)^2 + sy^2}{2st}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s+t)y^2 - 2txy + tx^2}{2st}} dy \end{aligned}$$

指数の肩の上を平方完成すれば

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s+t)\left(y - \frac{tx}{s+t}\right)^2}{2st}} e^{-\frac{t^2x^2 + tx^2}{2st}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left\{\sqrt{\frac{s+t}{st}}\left(y - \frac{tx}{s+t}\right)\right\}^2}{2}} dy \end{aligned}$$

となり、更に $\sqrt{\frac{s+t}{st}}\left(y - \frac{tx}{s+t}\right) = z$ と云う風に変数変換すれば、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{\frac{st}{s+t}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(s+t)}} e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s+t)}} e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}} \\ &= N_{s+t}(x) \end{aligned}$$

となります。

□

基本演習 6.5 2 次元の確率変数 (X, Y) があり、 X, Y は独立であって X は $N(2, 1)$ 、 Y は $N(0, 1)$ に従っています。

- (1) このとき $X + \sqrt{3}Y$ はどんな分布に従いますか。
- (2) 確率 $P[4 \leq X + \sqrt{3}Y]$ を計算して下さい。

【解答例】 (1) 独立和なので期待値・分散共に和になり、独立和もまた正規分布なので、 $X + \sqrt{3}Y$ は $N(2, 4)$ に従います。

(2)

$$\begin{aligned} P[4 \leq X + \sqrt{3}Y] &= P[4 \leq N(2, 4)] \\ &= P[2 \leq N(0, 4)] \\ &= P[1 \leq N(0, 1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1] \\ &\approx 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

□

基本演習 6.6 2つの独立な確率変数 X, Y があって、 X は正規分布 $N(1, 4)$ 、 Y は正規分布 $N(0, 9)$ に従うとき、確率 $P[2X + Y \geq 7.65]$ を求めてください。

【解答例】 $2X + Y$ は正規分布 $N(2, 25)$ に従いますから

$$\begin{aligned} P[2X + Y \geq 7.65] &= P[N(2, 25) \geq 7.65] \\ &= P[N(0, 25) \geq 5.65] \\ &= P[N(0, 1) \geq 1.13] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.13] \\ &\approx 0.5 - 0.3708 \\ &= 0.1292 \end{aligned}$$

です。

□

発展演習 6.7 次の三角分布の密度関数：

$$w(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に対してたたみ込み $w * w$ を計算して下さい。

$$(w * w)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x + \frac{4}{3} & -2 \leq x \leq -1 \\ -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3} & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x + \frac{4}{3} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 \leq x \end{cases}.$$

□

発展演習 6.8 長方形領域 $D : [0, 1] \times [1, 3]$ 上に一様に分布した確率変数を (X, Y) とするとき、各成分確率変数 X, Y はどんな密度関数をもつか調べて下さい。

それぞれの区間上の一様分布の密度関数になる。

□