6　独立な確率変数の和とたたみこみ

6.1　多次元の密度から各成分の密度を得る事

事実 6.1.1

$$(X,Y)\,:\,h(x,y) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} X\,:\,\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy \\ Y\,:\,\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx \end{cases}$$

6.2　確率変数の独立性と各成分の密度から多次元の密度を得る事

定義 6.2.1 $X_1,\ldots,X_n$ は確率変数とします。任意の区間 $J_1,\ldots,J_n$ に対して、事象のファミリー $\{X_k\in J_k\}_{k=1}^n$ が独立であるとき、確率変数のファミリー $X_1,\ldots,X_n$ は独立（independent）であると言います。

事実 6.2.2

$$\begin{cases} X\,:\,f(x) \\ Y\,:\,g(x) \\ X,Y \text{ は独立} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad (X,Y)\,:\,f(x)g(y)$$

6.3　２次元確率変数から派生する確率変数の期待値

定義 6.3.1 ２次元の確率変数 (X,Y) の密度関数が $h(x,y)$ であるとき、右辺の積分が存在する様な良い関数 $w(x,y)$ に対して、

$$E[w(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)h(x,y)dx\right\}dy$$

を（派生した）確率変数 $w(X,Y)$ の期待値と言います。

6.3.1　独立な成分の積

確率変数 X,Y が独立なら

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x)g(y)dx\right\}dy = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy = E[X]E[Y]$$

従って X,Y が独立であれば共分散は０です。

6.3.2　成分の和

$$E[\,aX+bY+c\,] = aE[X]+bE[Y]+c$$
$$Var[X+Y] = Var[X]+2Cov[X,Y]+Var[Y]$$

特に X,Y が独立であれば

$$Var[X+Y] = Var[X]+Var[Y]$$

6.4　独立な確率変数の和とたたみこみ

定義 6.4.1 関数 f と g のたたみこみ（convolution）$f*g$ を次の様に定義します：

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

明らかな性質として、対称性 $f*g=g*f$ をもちます。

6.4.1　たたみこみの具体計算

問題 6.4.2 区間 $(0,1)$ 上の一様分布の密度関数を $f(x)$ とするとき、たたみこみ $f*f$ を求めて下さい。

この一様分布の密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ですから、

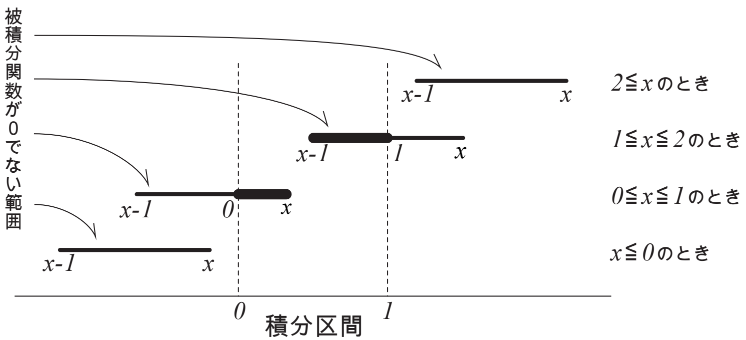
$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

であり、まず被積分関数のうち第２因子 $f(y)$ の方を具体化すると

$$= \int_0^1 f(x-y)dy$$

となります。

次に残った部分を具体化するわけですが、定義により被積分関数は $0 < x - y < 1$ すなわち $x - 1 < y < x$ である範囲以外では０となるのでこの範囲 $[x-1, x]$ が積分区間 $[0, 1]$ とどう交わるかが問題となります（区間の端点はあまり気にしなくていいです）。これを x の値によって場合分けするわけですが、数式オンリーでやっていると混乱しますから下図のような絵を描いて目で見て確認しながら考えると良いでしょう：



従って２つの区間が重なりをもつ場合にだけ実際の積分計算が出現して以下の通りになります：

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ \int_{x-1}^1 dy & 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^x dy & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -x+2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

これは三角分布ですね。 □

事実 6.4.3 ２つの確率変数 X_1, X_2 は独立であって、それぞれの密度関数が $h_1(x), h_2(x)$ であるとき、$X_1 + X_2$ の密度関数は h_1 と h_2 のたたみ込みになります。

6.5 独立な正規分布の和

正規分布 $N(0, t)$ の密度を $N_t(x)$ として $N_1 * N_1$ を計算してみると、

$$\begin{aligned}(N_1 * N_1)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(y^2 - xy + \frac{x^2}{2}\right)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(y - \frac{x}{2}\right)^2} dy\end{aligned}$$

となります。更に $y - \frac{x}{2} = z$ と云う風に変数変換すれば、Gauß積分が出て来て

$$(N_1 * N_1)(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2 \cdot 2}} = N_2(x)$$

が得られますから、丁度分散が $1 + 1 = 2$ の正規分布になっている事が分かります。

同様に計算すれば、一般の分散の場合も分散の和：$N_s * N_t = N_{s+t}$ となる事が分かります（演習問題）。

定理 6.5.1 それぞれ $N(m, s), N(n, t)$ に従う２つの独立な正規分布の和は正規分布 $N(m + n, s + t)$ に従います。

6.6　問題演習

基本演習 6.1 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ とするとき、たたみ込み $f * f$ を求めて下さい。

基本演習 6.2 たたみ込みの対称性：$f * g = g * f$ を証明して下さい。

基本演習 6.3 区間 $[0,1]$, $[2,4]$ それぞれの上の一様分布の密度関数を f, g とします。このときたたみ込み $f * g$ を求めて下さい。

基本演習 6.4 正規分布 $N(0,t)$ の密度関数を N_t で表します：

$$N_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

　このとき $N_s * N_t = N_{s+t}$ となる事を示して下さい。ただし Gauß積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ は既知とします。

基本演習 6.5 2 次元の確率変数 (X,Y) があり、X, Y は独立であって X は $N(2,1)$、Y は $N(0,1)$ に従っています。

(1) このとき $X + \sqrt{3}Y$ はどんな分布に従いますか。
(2) 確率 $P[4 \leq X + \sqrt{3}Y]$ を計算して下さい。

基本演習 6.6 ２つの独立な確率変数 X, Y があって、X は正規分布 $N(1,4)$、Y は正規分布 $N(0,9)$ に従うとき、確率 $P[2X + Y \geq 7.65]$ を求めてください。

発展演習 6.7 次の三角分布の密度関数：

$$w(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に対してたたみ込み $w * w$ を計算して下さい。

基本演習 6.8 ３つの事象 A, B, C のうちどの２つの組（例えば $\{A, B\}$ など）も独立であるが、$\{A, B, C\}$ は独立でないような例を作って下さい。
　要するに、

$$P[A \cap B] = P[A]P[B], \quad P[B \cap C] = P[B]P[C], \quad P[C \cap A] = P[C]P[A]$$

は成り立つけれども $P[A \cap B \cap C] \neq P[A]P[B]P[C]$ であるような例を挙げて下さい。

　また、逆に、$P[A \cap B \cap C] = P[A]P[B]P[C]$ は成り立つけれども $P[A \cap B] \neq P[A]P[B]$ であるような例を挙げて下さい。

発展演習 6.9 長方形領域 D：$[0,1] \times [1,3]$ 上に一様に分布した確率変数を (X,Y) とするとき、各成分確率変数 X, Y はどんな密度関数をもつか調べて下さい。

発展演習 6.10 ２次元の確率変数 $Z = (X,Y)$ は密度関数 $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ をもつとします。このとき各成分確率変数 X, Y の密度関数を求め、また、X, Y が独立であるかどうかも調べて下さい。

課題第２回

　以下の問題を自分で考えて自筆にて解答してください。

課題 2.1 次の２つの関数のたたみ込み $(f * g)(x)$ を計算して下さい：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4A：

出題：令和 6 年 11 月 12 日
通常提出期限：令和 6 年 11 月 19 日　講義開始時
最終提出期限：令和 6 年 11 月 20 日　17 時 00 分 00 秒

5E・4M：

出題：令和 6 年 11 月 15 日
通常提出期限：令和 6 年 11 月 22 日　講義開始時
最終提出期限：令和 6 年 11 月 23 日　17 時 00 分 00 秒