

7 ここまでの復習

2023 A/W

問題 1 ブランデーの含有成分を調べる実験で、6種類のブランデーについて、次のようなタンニン酸含有量とエステル含有量（いずれも 100 ブルーフ濃度検算での 100 リットルあたりグラム表示）を得ました：

| | | | | | | |
|-----------|------|------|-----|------|------|------|
| タンニン酸 X | 19 | 15 | 9 | 10 | 11 | 19 |
| エステル Y | 31.7 | 32.3 | 8.5 | 14.3 | 14.0 | 17.8 |

以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい（近似はせず分数で答えること）。
- (2) X, Y の共分散を求め（近似はせず分数で答えること）、 Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、タンニン酸の含有量が 12 であるようなブランデーのエステル量を推定して下さい（小数点以下 2 桁目を四捨五入して小数点以下 1 桁目までの近似値として下さい）。

問題 2 密度関数が次の $h(x)$ ：

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{5\pi}{3}]$ を求めてください。

問題 3 令和 5 年度大学入学共通テストの国語の受験者数は 45 万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 105.7、標準偏差（分散の正の平方根）が 34.1 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。得点が 150 点だった受験者の順位はだいたい何位くらいでしょうか。

問題 4 確率変数 X が正規分布 $N(13.4, 6.1^2)$ に従うときに $P[a \leq X] = 0.3483$ となるような a を求めてください。

問題 5 次の 2 つの関数 $f(x), g(x)$ のたたみ込み $(f * g)(x)$ を計算してください：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

問題 6 xy 平面の長方形 $[1, 2] \times [2, 3]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて、曲面 $z = 6x^2y + 2y$ を屋根とした立体の体積を求めてください。

2022 A/W

問題 7 新しく開発した制がん剤を、がんになっている 10 匹のモルモットに投与し、体重 X （第 1 成分、単位 mg）と生存日数 Y （第 2 成分、単位日）の統計をとったところ次の様になりました：

$$(X, Y) : (520, 42), (370, 20), (740, 54), (580, 30), (920, 68), \\ (420, 34), (820, 55), (680, 40), (550, 40), (500, 17)$$

以下の問いに答えて下さい。

- (1) X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい（近似はしないこと）。
- (2) X, Y の共分散を求め（近似はしないこと）、更に Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となる事を利用して、体重が 1210mg の場合の生存日数を推定して下さい。

問題 8 密度関数が次の $h(x)$ ：

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 2 \leq x \\ -x + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[0.5 \leq X]$ を求めてください。

問題 9 ある英語の試験の受験者数は 50 万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 122.8、標準偏差（分散の正の平方根）が 41.2 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。得点が 170 点だった受験者の順位はだいたい何位くらいでしょうか。

問題 10 確率変数 R が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[R \leq w] = 0.209$ を満たす w の値を求めて下さい。

問題 11 xy 平面の長方形 $[0, 1] \times [1, 3]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて、曲面 $z = x^2 + 2y$ を屋根とした立体の体積を求めてください。

2021 A/W

問題 12 ある化学反応工程で温度 X (度) に対する収量 Y (グラム) は次の表の通りでした:

| | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| X | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 |
| Y | 48 | 54 | 59 | 63 | 68 | 73 | 78 | 82 | 84 |

(1) X, Y それぞれの平均値と X の分散を求めて下さい。ただし、分数計算が割り切れない場合は四捨五入等の近似は一切せず、分数の形で答えて下さい。

(2) X, Y の共分散 $Cov[X, Y]$ を求め、 Y の X への回帰直線:

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

を使って温度が 95 度のときの収量を求めて下さい。

問題 13 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 C について、確率 $P[-1 \leq C \leq 1]$ と期待値 $E[C]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問題 14 確率変数 G が正規分布 $N(-2, 9)$ に従うとき、以下の問いに答えてください。

- (1) $P[-2.39 \leq G < 1.63]$ を標準正規分布表を使って求めて下さい。
- (2) $P[w \leq G] = 0.0102$ となるような w の値を標準正規分布表を使って求めて下さい。

問題 15 $[-1, 0]$ 上の一様分布の密度関数 $f(x)$ と、 $[0, 1]$ 上の一様分布の密度関数 $g(x)$ に対してたたみ込み $f * g$ を計算して下さい。

問題 16 (1) 2変数関数 $h(x, y)$ が2次元の確率変数 $X = (X, Y)$ の密度関数であるとはどう云うことが簡潔に説明して下さい。

(2) 長方形 $[-1, 1] \times [2, 5] = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5\}$ 上の一様分布の密度関数を答えてください。ただし説明は不要であり、関数のみ記述してください。

2021 S/S

問題 17 次の表はある地域で産出される赤ワインについて、年度ごとの育成期の平均気温 D 、10年後の市場価値 (1961年産の価格との比の対数) P をまとめたものです:

| | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 |
| D | 16.5 | 17.3 | 16.3 | 15.7 | 17.3 | 15.4 | 16.5 | 16.2 | 16.2 | 16.6 |
| P | -2.0 | 0 | -1.1 | -1.8 | -1.2 | -2.2 | -0.7 | -1.7 | -2.2 | -2.1 |

(1) D, P の平均値 $E[D], E[P]$ を計算して下さい。ただし、値は一切の近似をせずに求めて下さい。

(2) D の分散 $Var[D]$ と D と P の共分散 $Cov[D, P]$ を求めて下さい。ただし、値は一切の近似をせずに求めて下さい。

必要であれば下のような表を作成して適宜利用して下さい。

| | | | | | | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 |
| $D - E[D]$ | | | | | | | | | | |
| $P - E[P]$ | | | | | | | | | | |
| 積 | | | | | | | | | | |

(3) P の D への回帰直線が

$$y - E[P] = \frac{Cov[D, P]}{Var[D]}(x - E[D])$$

となることを使って平均気温 D が 16.0 だった場合の価値 P の推定値を求めて下さい。値は四捨五入により小数点以下 2 桁で答えて下さい。

問題 18 $[-1, 1]$ 上の一様分布の密度関数を $f(x)$ とするとき、たたみこみ $(f * f)(x)$ を求めて下さい。

問題 19 密度関数が次の $h(x)$ であるような確率変数 X について確率 $P[1 \leq X \leq 2]$ を求めて下さい。また期待値 $E[X]$ が存在するかどうか調べ、存在する場合はその値も求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{3}x + 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

問題 20 確率変数 B が正規分布 $N(37, 3^2)$ に従うときに、裏面にある標準正規分布表を使って確率 $P[41 \leq B]$ を計算して下さい。

問題 21 xy -平面内の領域（長方形） D と関数 $h(x, y)$ が次の通りであるときに：

$$D : [0, 1] \times [1, 3], \quad h(x, y) = xy^2 + 1$$

D を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて曲面 $z = h(x, y)$ で屋根をかけて出来る立体の体積 $V_D(h)$ を求めて下さい。

2020 A/W

問題 22 次の2次元のデータ (A, B) について以下の問いに答えして下さい。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| A | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| B | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 8 | 7 | 10 | 11 | 10 |

(1) 平均値 $E[A], E[B]$ と分散 $Var[A]$ を求めて下さい。

(2) B の A への回帰直線の方程式が

$$y - E[B] = \frac{Cov[A, B]}{Var[A]}(x - E[A])$$

となることを使って A が5である時の B の値を概算して下さい。

問題 23 (1) 区間 $[4, 10]$ 上の一様分布に従う確率変数 X の密度関数を求めて下さい。

(2) 確率 $P[5 \leq X \leq 8]$ と分散 $Var[X]$ を求めて下さい。

問題 24 確率変数 R が平均 20、分散 4^2 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して $P[16 \leq R \leq 30]$ を求めて下さい。

問題 25 次で定義された $f(x), g(x)$ に対してたたみ込み $f * g$ を計算して下さい。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ただし、たたみ込みは

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

で定義されます。

問題 26 2変数関数 $h(x, y)$ が2次元の確率変数 $X = (X, Y)$ の密度関数であるとはどう云うことか簡潔に説明して下さい。

問題 27 平均 5.02、分散 3.5^2 の母集団からとった大きさ 100 の標本平均 \bar{X} に対して確率 $P[4.53 \leq \bar{X}]$ を求めて下さい。

2020 S/S（中間試験がなかったので定期試験より）

問題 28 ある中古車センターにおいて、同一車種の中古車の使用年数 X （年）と価格 Y （万円）は下表のようになっていました。

| | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| X | 1 | 4 | 10 | 2 | 5 | 6 | 8 | 1 |
| Y | 64 | 35 | 11 | 47 | 27 | 36 | 30 | 59 |

(1) X, Y の平均値と X の分散、 X と Y の共分散を求めてください。ただし、一切の近似をせず、割り切れない分数は分数のまま答えてください。

(2) Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となることを利用して、使用年数が3年のときの価格を概算してください。

問題 29 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 W に対して期待値 $E[W]$ と確率 $P[-2.2 \leq W \leq 0.3]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

2019 A/W

問題 30 次の2次元のデータ (A, B) について以下の問いに答えて下さい。

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|
| A | 3 | 2 | 7 | 1 | 1 | 2 | 1 | 6 | 3 | 0 | 7 | 3 |
| B | 5 | 8 | 6 | 5 | 8 | 8 | 7 | 11 | 7 | 4 | 7 | 8 |

(1) 平均値 $E[A], E[B]$ と分散 $Var[A]$ を求めて下さい。

(2) B の A への回帰直線の方程式が

$$y - E[B] = \frac{Cov[A, B]}{Var[A]}(x - E[A])$$

となることを使って A が5である時の B の値を概算して下さい。

問題 31 密度関数が次の $h(x)$ であるような確率変数 A について、確率 $P[0.4 \leq A \leq 1.2]$ と期待値 $E[A]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

問題 32 確率変数 R が平均5、分散4の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[R \leq w] = 0.209$ を満たす w の値を求めて下さい。

問題 33 (1) 区間 $[0, 1], [-1, 2]$ 上の一様分布の密度関数 $f(x), g(x)$ をそれぞれ求めてください。

(2) 上で求めた $f(x), g(x)$ に対してたたみ込み $f * g$ を計算して下さい。

問題 34 xy -平面内の領域 D :

$$D : \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

を床とし、この領域の周囲に垂直な壁を立て、曲面 $z = h(x, y) = 1 - x^2$ で蓋をして得られる立体の体積 $V_D(h)$ を求めてください。

2019 S/S

問題 35 ある日のプロ野球公式戦は全5試合が行われ、10チームの得点と安打数は以下の通りでした :

| | | | | | | | | | | |
|---------|----|---|----|----|---|----|---|---|---|---|
| 得点 X | 5 | 1 | 9 | 6 | 1 | 10 | 1 | 3 | 0 | 3 |
| 安打数 Y | 11 | 4 | 10 | 12 | 6 | 15 | 5 | 4 | 6 | 3 |

得点データを X 、安打数データを Y として以下の問いに答えてください。

- X, Y の平均値と X の分散を計算して下さい (近似はしないこと)。
- X, Y の共分散を求めて下さい (近似はしないこと)。
- Y の X への回帰直線 :

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

を利用して、得点が4点の場合の安打数を推定して下さい。

問題 36 (1) 確率変数 X の密度関数が $h(x)$ であるとはどういうことか述べてください。
(2) 密度関数が

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[0 \leq X \leq 1]$ を計算して下さい。

問題 37 平均50、標準偏差3の正規分布に従う確率変数 W に対して、確率 $P[55 \leq W \leq 57]$ を求めて下さい。

問題 38 次の2つの関数のたたみ込み $(f * g)(x)$ を計算して下さい :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

問題 39 xy -平面内の長方形 $[0, 3] \times [0, 2]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立て、曲面 $z = 2xy^2 + y$ で蓋をした立体の体積を求めて下さい。