

9 サンプル調査による母平均の推定

9.1 母平均の点推定

事実 9.1.1 平均 m 、分散 v の母集団からとった大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ の平均は m 、分散は $\frac{v}{n}$ です。

サンプルサイズ n が十分大きければ標本平均の分散は極めて小さくなりますから標本平均は母平均の周りに密集して分布している事が分かります。従って具体的なサンプルの平均値で母平均の代用（概算値）とする事が出来ます。

事実 9.1.2 [母平均の点推定] 十分大きなサイズのサンプルを採取してその平均値をとれば、その値が母集団の平均値に大体等しいと考えられます。

ただし、『十分大きな n 』と言いますが母分散が分からなければ $\frac{v}{n}$ がどの程度であるかは分からず、本当に標本平均の分散が小さくなっているのか分かりません。

9.2 母分散既知の場合の母平均の区間推定

逆に母分散が分かっている程度であればある程度の根拠ある評価が出来ます。

事実 9.2.1 正規分布 $N(m, v)$ に従う母集団からとった大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{v}{n}\right)$ に従います。

事実 9.2.2 [the central limit theorem] 平均値 m 、分散 $v > 0$ の母集団からとった十分大きなサイズ n の標本平均は $(n \geq 50)$ 正規分布 $N\left(m, \frac{v}{n}\right)$ で近似されます。

事実 9.2.3 正規分布 $N(m, v)$ に従う確率変数 X に対して $\frac{X-m}{\sqrt{v}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従います。

まずは母集団が正規分布に従っている場合を見ましょう。

問題 9.2.4 分散 3.87^2 の正規分布に従う母集団から大きさ 20 のサンプルを取って調べたところ平均値が 169.6 でした。母平均がどの程度の値であるのかを推定して下さい。

母平均を仮に m としておきます。母集団が正規分布 $N(m, 3.87^2)$ に従いますから大きさ 20 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3.87^2}{20}\right)$ に従います。そこで、まずは

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となる様な $d > 0$ を求めてみましょう。標準化すれば

$$0.95 = P\left[\left|\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{3.87^2}{20}}}\right| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{3.87^2}{20}}}\right] = P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{3.87^2}{20}}}\right] = 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d\sqrt{20}}{3.87}\right]$$

から

$$0.475 = P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d\sqrt{20}}{3.87}\right]$$

となりますが、標準正規分布表に依れば、

$$\frac{d\sqrt{20}}{3.87} \approx 1.96, \quad \text{従って} \quad d \approx \frac{1.96 \times 3.87}{2\sqrt{5}} \approx 1.70$$

である事が分かります。以上から $P[|\bar{X} - m| \leq 1.70] \approx 0.95$ が分かりました。ここから何が結論出来るのでしょうか。

事象『 $|\bar{X} - m| \leq 1.70$ 』とその余事象『 $|\bar{X} - m| > 1.70$ 』の確率はそれぞれ

$$P[|\bar{X} - m| \leq 1.70] \approx 0.95, \quad P[|\bar{X} - m| > 1.70] \approx 0.05$$

であり、またこれらは排反事象ですから今回のサンプル調査で得られた $\bar{X}$ の実現値であるサンプル平均 169.6 はこのどちらか一方に含まれます。ただし母平均 m は未知ですからどちらなのかは分かりません。でもどちらか一方（のみ）に入っている事だけは確かなのです。さて、どちらに含まれると考えるのが自然でしょうか？

答えは当然『 $169.6 - m \leq 1.70$ が成り立っている』と考えた方が自然です。だって袋の中の数のうち 95 %は不等式を満たしているからです。もちろんこの判断は間違っている可能性があります、『満たしていない数』を引く確率は高々 5 %ですからまあそれぐらいのリスクは採ろうと云うわけです。

ここで注意しなければならないのはあくまで $P[|\bar{X} - m| > 1.70] \approx 0.05$ なのであって決して $P[|169.6 - m| > 1.70] \approx 0.05$ ではないと云う事です。そもそも母平均 m は分かっていないだけで単なる定数ですから、『確率』が入り込む余地はありません。

この状況を指して、『信頼度 95 %で $|169.6 - m| \leq 1.70$ である』と言う事にします。不等式を母平均 m を中心に書き直せば

$$169.6 - 1.70 \leq m \leq 169.6 + 1.70$$

ですから、母平均 m は区間 $[167.9, 171.3]$ (この区間を信頼度 0.95、あるいは 95 %の信頼区間と言います) に 95 %の信頼度で入っていると言えます。□

9.2.1 非正規母集団における大標本による母平均の区間推定

母集団の分布が分からない場合でも、サンプルサイズが大きければ (50 以上) 中心極限定理によって同じような方法で区間推定をする事が出来ます：

問題 9.2.5 母集団は平均値が存在し、分散が 3.87^2 である事が分かっています。この中から大きさ 50 のサンプルを取って調べたところ平均値が 169.6 でした。

この時に母平均 m の信頼度 95 パーセントの信頼区間を求めて下さい。

母分布：	不明	この母集団からとった大きさ 50 の標本平均を $\bar{X}$ とします。サイズが大きいのので中心極限定理が適用出来、 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3.87^2}{50}\right)$ で近似されます。そこでまず
母平均：	m (不明)	
母分散：	3.87^2	
サンプルサイズ：	50	
サンプル平均：	169.6	

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となる様な $d > 0$ を求めます。少し変形すれば

$$0.95 = P\left[\left|\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}}\right| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{3.87^2}{50}}}\right] \approx P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d\sqrt{50}}{3.87}\right]$$

となりますが、標準正規分布表に依れば、 $P[|N(0, 1)| \leq 1.96] \approx 0.95$ ですから、

$$\frac{d\sqrt{50}}{3.87} = 1.96, \quad d = \frac{1.96 \times 3.87}{5\sqrt{2}} \approx 1.07$$

によって $P[|\bar{X} - m| \leq 1.07] \approx 0.95$ が分かりました。

標本平均の具体値が分かっていますのでこれを m に関する条件に読み替えれば $|169.6 - m| \leq 1.07$ 、即ち $169.6 - 1.07 \leq m \leq 169.6 + 1.07$ であることが 95 パーセントの信頼度で正しく、従って母平均 m の、信頼度 95 %の信頼区間は $[168.53, 170.67]$ です。□

9.3 問題演習

基本演習 9.1 ある母集団から次のサンプルが得られました。母平均 m の推定値を点推定によって求めて下さい。

5.52, 25.48, 22.97, 29.87, 8.20, 24.73, 21.80, 36.36, 11.09, 10.81

基本演習 9.2 [教科書 問題 16.7] ある工場で生産しているケース入洗剤の内容量は、従来の測定によって母分散が $(3.5g)^2$ の正規分布に従う事が知られています。

(1) 製品の中から 25 個を無作為に抽出して測定したところ、平均値が 202.8g でした。内容量の母平均 μ に対して、信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

(2) 母平均 μ に対する 95 % の信頼区間の幅を 2g 以下にするためには、標本数を幾らにすれば良いでしょうか。

基本演習 9.3 [問題集 5.4] ある母集団の変量 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。

(1) この母集団から大きさ 16 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプル平均値が 54.3 でした。母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

(2) 母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 以下にするためには、サンプルの大きさを最低いくらにすれば良いでしょうか。

基本演習 9.4 分散 4^2 の正規分布に従う母集団から抽出された大きさ 25 のサンプルの平均値が 52.3 でした。母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

基本演習 9.5 [問題集 5.6] 分散が 0.058 である正規母集団から大きさ 5 のサンプルを無作為抽出し特性 X の値を調べたところ次の通りでした：

2.43	1.89	2.37	2.30	1.74
------	------	------	------	------

このとき母平均の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

基本演習 9.6 [問題集 5.14(1)] ある食品に含まれるビタミンの量を調べるため、大きさ 17 のサンプルを抽出し 100g 中に含まれるビタミンの量 (単位 mg) を測って次の値を得ました：

16	22	21	20	23	21	19	15	13	23
17	20	29	18	22	16	25			

ビタミンの含有量が母分散 4^2 の正規分布に従うときビタミン含有量の母平均を信頼度 95 % で推定して下さい。

基本演習 9.7 [問題集 5.15 改題] 100 個の部品を任意抽出して強度試験をしたところ、平均強度は 157kg でした。過去の経験から母集団の標準偏差は 3kg であることが分かっています。母平均の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

基本演習 9.8 [教科書 問題 16.9 改題] ある工場の製品の中から、100 個を抽出してその寿命を調べたところ平均値が 2100 時間でした。この工場の製品の寿命の全体は標準偏差が 75 時間である事は既知として寿命の母平均の 95 % の信頼区間を求めて下さい。

●過去の定期試験から

基本演習 9.9 次のの中から正しいものを 1 つ選んでください。

(2) $Var[X] = 7, Var[Y] = 1$ で X, Y が独立であるとき、 $Var[X - 2Y] = 11$ です。

(3) 母集団が正規分布に従っていれば、標本平均の分散は母集団の分散に一致します。

(5) 2次元の確率変数 (A, B) があって A, B それぞれの密度関数が $f(x), g(y)$ であれば、 (A, B) の密度関数は $f(x)g(y)$ です。

基本演習 9.10 ある工場で生産しているケース入洗剤の内容量は、従来の測定によって母分散が $(3.5g)^2$ の正規分布に従う事が知られています。

ある単位生産時間の製品の中から 25 個を無作為に抽出して測定したところ、平均値が 202.8g でした。内容量の母平均 m に対して信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

基本演習 9.11 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

(1) X の分散が 1 であるとき、 $-2X$ の分散は -4 である。

(2) 正規分布に従う母集団からとった標本平均は正規分布に従う。

基本演習 9.12 母集団 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。この母集団から大きさ 25 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプルの平均値が 54.3 でした。母平均の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

基本演習 9.13 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

- (1) 大きさ 100 の標本平均の分散は母集団の分散より小さい。
- (2) 大きさ 100 の標本平均の分散は母集団の分散より大きい。
- (6) 正規分布に従う確率変数の 3 倍は正規分布に従う。

基本演習 9.14 次の文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい（登場する平均値、分散、密度関数等は全て存在するものとします）。

- (1) 確率変数の和の分散 $Var[A+B]$ はそれぞれの分散の和 $Var[A] + Var[B]$ に一致します。
- (2) 標本平均の平均値は母集団の平均値より少し小さい。
- (3) 2次元の確率変数 (X, Y) の密度関数が分かっているならば、成分確率変数 X, Y の密度関数も分かります。

基本演習 9.15 次の文章は正しいでしょうか、間違っているでしょうか。○/×のみで答えて下さい。

- (2) 標本平均の平均値は母集団の平均値に一致します。
- (3) 標本のサイズが十分大きければ、母集団がどんな分布であっても標本平均は正規分布で良く近似されます。

基本演習 9.16 ある工場がこの日に生産された部品の中から 100 個を任意抽出して強度試験をしたところ、平均強度は 157kg でした。経験から母集団（この日生産された部品の強度全体）の標準偏差は 3kg であると考えて良いことが分かっています。母平均の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

基本演習 9.17 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

- (1) 正規母集団における母平均の区間推定において、他の条件が同じであれば、信頼度を 95 %から 99 %に上げると信頼区間の幅は狭くなる。
- (2) 正規母集団における母平均の区間推定において、他の条件が同じであれば、信頼度を 95 %から 99 %に上げると信頼区間の幅は広がる。
- (5) 標本平均の分散は母集団の分散より大きい。
- (7) 母集団が正規分布でなくても、標本のサイズが 100 であれば標本平均は正規分布に従う。

基本演習 9.18 次の各文章が正しいか間違っているかを○/×のみで答えて下さい。

- (2) 平均 13、分散 2 の母集団からとった大きさ 100 の標本平均は正規分布 $N(13, \frac{2}{100})$ に従います。

基本演習 9.19 分散 3.5^2 の正規分布に従う母集団から大きさ 25 のサンプルをとってその平均値を調べたところ 209.7 でした。母平均 m の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

基本演習 9.20 正規分布 $N(13, 2.5)$ に従う母集団からとった大きさ 10 の標本平均 $\bar{X}$ について、確率 $P[12.4 < \bar{X}]$ を求めて下さい。

課題第 4 回

以下の問題を自分で考えて自筆にて解答してください。

課題 4.1 ある工場がこの日に生産された部品の中から 100 個を任意抽出して強度試験をしたところ、平均強度は 157kg でした。経験から母集団（この日生産された部品の強度全体）の標準偏差は 3kg であると考えて良いことが分かっています。母平均の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

課題 4.2 ある工場で生産しているケース入洗剤の内容量は、従来の測定によって母分散が $(3.5g)^2$ の正規分布に従う事が知られています。

ある単位生産時間の製品の中から 25 個を無作為に抽出して測定したところ、平均値が 202.8g でした。内容量の母平均 m に対して信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

5E・4M：

出題：令和 6 年 12 月 06 日
 出席者用提出期限：令和 6 年 12 月 06 日 講義終了時
 欠席者用提出期限：令和 6 年 12 月 13 日 17 時 00 分 00 秒

4A：

出題：令和 6 年 12 月 10 日
 出席者用提出期限：令和 6 年 12 月 10 日 講義終了時
 欠席者用提出期限：令和 6 年 12 月 17 日 17 時 00 分 00 秒

問題演習解答例

基本演習 9.1 ある母集団から次のサンプルが得られました。母平均 m の推定値を点推定によって求めて下さい。

5.52, 25.48, 22.97, 29.87, 8.20, 24.73, 21.80, 36.36, 11.09, 10.81

【解答例】(母平均の推定値) $= \frac{5.52 + \dots + 10.81}{10} = 19.683$. □

基本演習 9.2 [教科書 問題 16.7] ある工場で生産しているケース入洗剤の内容量は、従来の測定によって母分散が $(3.5g)^2$ の正規分布に従う事が知られています。

(1) 製品の中から 25 個を無作為に抽出して測定したところ、平均値が 202.8g でした。内容量の母平均 μ に対して、信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

(2) 母平均 μ に対する 95 % の信頼区間の幅を 2g 以下にするためには、標本数を幾らにすれば良いでしょうか。

母分布:	正規分布
母平均:	μ (不明)
母分散:	3.5^2
サンプルサイズ:	25
サンプル平均:	202.8

(1) 大きさ 25 の標本平均を $\bar{X}$ として、まず

$$P[|\bar{X} - \mu| \leq d] = 0.95$$

となる $d > 0$ を求めます。 $\bar{X}$ は $N\left(\mu, \frac{3.5^2}{25}\right)$ に従うので、

$$0.95 = P\left[\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5^2}{25}}}\right| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{3.5^2}{25}}}\right] = P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{5d}{3.5}\right] = 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.7}\right]$$

から

$$0.475 = P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.7}\right]$$

ですが、標準正規分布表によれば $\frac{d}{0.7} = 1.960$ 、すなわち $d \approx 1.37$ が分かります。従って

$$0.95 \approx P[|\bar{X} - \mu| \leq 1.37] = P[\bar{X} - 1.37 \leq \mu \leq \bar{X} + 1.37]$$

ですから、95 % の信頼度で $201.4 \approx 202.8 - 1.37 \leq \mu \leq 202.8 + 1.37 \approx 204.2$ であることが分かり、求める信頼区間は $[201.4, 204.2]$ です。

(2) サンプルの大きさを n とします。このとき標本平均 $\bar{X}$ は $N\left(\mu, \frac{3.5^2}{n}\right)$ に従いますから、同様に計算して

$$0.95 = P[|\bar{X} - \mu| \leq d] = P\left[\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5^2}{n}}}\right| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{3.5^2}{n}}}\right] = P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d\sqrt{n}}{3.5}\right]$$

ですが、標準正規分布表から $\frac{\sqrt{nd}}{3.5} = 1.96$ 、すなわち $d = \frac{6.86}{\sqrt{n}}$ が分かります。題意により $d \leq 1$ であれば良いので $6.86 \leq \sqrt{n}$ 、すなわち $n \geq 6.86^2 \approx 47.06$ から $n = 48$ であれば良い事が分かります。 □

基本演習 9.3 [問題集 5.4] ある母集団の変量 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。

(1) この母集団から大きさ 46 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプル平均値が 54.3 でした。母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

(2) 母平均に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅を 4 以下にするためには、サンプルの大きさを最低いくらにすれば良いでしょうか。

【解答例】(1) 母平均を m とし、この母集団からとった大きさ 16 の標本平均を $\bar{X}$ とします。このとき、 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{100}{16}\right)$ に従います。そこで

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|\bar{X} - m| \leq d] \\ &= P\left[\left|N\left(m, \frac{100}{16}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{10}{4}}\right] \\ &= 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{10}{4}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{10}{4}}\right] \end{aligned}$$

ここで標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{\frac{10}{4}} \approx 1.96$$

ですから、これを解けば、 $d \approx 4.9$ が得られます。従って

$$P[|\bar{X} - m| \leq 4.9] \approx 0.95$$

であり、今回のサンプル値 54.3 については、信頼度 95 % で

$$|54.3 - m| \leq 4.9, \quad \text{すなわち} \quad 49.4 \leq m \leq 59.2$$

が成り立っていると言えます。従って求める信頼区間は $[49.4, 59.2]$ です。

(2) 母平均を m とし、この母集団からとった大きさ n の標本平均を $\bar{X}$ とします。

このとき、 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{100}{n}\right)$ に従います。そこで

$$P[|\bar{X} - m| \leq 2] = 0.95$$

となるような n を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|\bar{X} - m| \leq 2] \\ &= P\left[\left|N\left(m, \frac{100}{n}\right) - m\right| \leq 2\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{2}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right] \\ &= 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{2}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{2}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right] \end{aligned}$$

ここで標準正規分布表によれば

$$\frac{2}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \approx 1.96, \quad \text{すなわち} \quad n \approx 96.04$$

が得られます。 n が大きいほど信頼区間の幅は小さくなりますから結局最低 $n = 97$ であれば良い事が分かります。□

基本演習 9.4 分散 4^2 の正規分布に従う母集団から抽出された大きさ 25 のサンプルの平均値が 52.3 でした。母平均 m の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】母平均を m 、大きさ 25 の標本平均を $\bar{X}$ とします。このとき $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{4^2}{25}\right)$ に従います。
まず

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &= P\left[\left|N\left(m, \frac{4^2}{25}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{4}{5}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{4}{5}}\right] \end{aligned}$$

ここで正規分布表から

$$\frac{d}{\frac{4}{5}} \approx 1.96, \quad \text{すなわち} \quad d \approx 1.568$$

がわかりますから

$$P[|\bar{X} - m| \leq 1.568] \approx 0.95$$

となっている事が分かります。従って今回のサンプル値 52.3 について、信頼度 95 %で

$$|52.3 - m| \leq 1.568, \quad \text{すなわち} \quad 50.732 \leq m \leq 53.868$$

が成り立っていると言えます。従って求める信頼区間は $[50.732, 53.868]$ です。□

基本演習 9.5 [問題集 5.6] 分散が 0.058 である正規母集団から大きさ 5 のサンプルを無作為抽出し特性 X の値を調べたところ次の通りでした：

2.43	1.89	2.37	2.30	1.74
------	------	------	------	------

このとき母平均の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】母平均を m 、大きさ 5 の標本平均を A とすると、 A は正規分布 $N\left(m, \frac{0.058}{5}\right)$ に従います。

$$P[|A - m| \leq d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めると、

$$\begin{aligned} 0.95 &= P\left[\left|N\left(m, \frac{0.058}{5}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{0.058}{5}}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{0.058}{5}}}\right] \end{aligned}$$

であることと標準正規分布表によって

$$\frac{d}{\sqrt{\frac{0.058}{5}}} \approx 1.96 \quad \text{すなわち} \quad d \approx 0.211$$

が得られます。すると今回のサンプル値の平均

$$\frac{2.43 + \cdots + 1.74}{5} = 2.146$$

について、信頼度 95 %で

$$|2.146 - m| \leq 0.211, \quad 1.935 \leq m \leq 2.357$$

であると言えます。従って求める信頼区間は [1.935, 2.357] です。

□

基本演習 9.6 [問題集 5.14(1)] ある食品に含まれるビタミンの量を調べるため、大きさ 17 のサンプルを抽出し 100g 中に含まれるビタミンの量 (単位 mg) を測って次の値を得ました：

16	22	21	20	23	21	19	15	13	23
17	20	29	18	22	16	25			

ビタミンの含有量が母分散 4^2 の正規分布に従うときビタミン含有量の母平均を信頼度 95 % で推定して下さい。

【解答例】母平均を m 、大きさ 17 の標本平均を A とすれば、 A は正規分布 $N\left(m, \frac{4^2}{17}\right)$ に従います。そこで

$$P[|A - m| \leq d] = 0.95$$

となる d を求めると、

$$\begin{aligned} 0.95 &= P\left[\left|N\left(m, \frac{4^2}{17}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{4^2}{17}}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{4^2}{17}}}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表によって

$$\frac{d}{\sqrt{\frac{4^2}{17}}} \approx 1.96, \quad \text{すなわち} \quad d \approx 1.90$$

が得られます。すると今回のサンプル値の平均：

$$\frac{16 + \cdots + 25}{17} = 20$$

について、信頼度 95 %で

$$|20 - m| \leq 1.90, \quad \text{従って} \quad 18.1 \leq m \leq 21.9$$

が成り立つ事が分かります。従って求める信頼区間は [18.1, 21.9] です。

□

基本演習 9.7 [問題集 5.15 改題] 100 個の部品を任意抽出して強度試験をしたところ、平均強度は 157kg でした。過去の経験から母集団の標準偏差は 3kg であることが分かっています。母平均の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】母平均を m 、大きさ 100 の標本平均を A とします。標本サイズが大きいのので A は正規分布 $N\left(m, \frac{3^2}{100}\right)$ で近似されます。

まず

$$P[|A - m| \leq d] = 0.95$$

となるような d を求めると、

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx P\left[\left|N\left(m, \frac{3^2}{100}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{3}{10}}\right] \\ 0.475 &\approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{3}{10}}\right] \end{aligned}$$

ですから標準正規分布表によって

$$\frac{d}{\frac{3}{10}} \approx 1.96, \quad d \approx 0.588$$

が分かります。すると今回のサンプル値である 157 について、信頼度 95 %で

$$|157 - m| \leq 0.588, \quad \text{従って} \quad 156.412 \leq m \leq 157.588$$

が成り立っていると言えます。従って求める信頼区間は [156.412, 157.588] です。

□

基本演習 9.8 [教科書 問題 16.9 改題] ある工場の製品の中から、100 個を抽出してその寿命を調べたところ平均値が 2100 時間でした。この工場の製品の寿命の全体は標準偏差が 75 時間である事は既知として寿命の母平均の 95 %の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】母平均を m 、大きさ 100 の標本平均を A とします。標本サイズが大きいのので A は正規分布 $N\left(m, \frac{75^2}{100}\right)$ で近似されます。

まず

$$P[|A - m| \leq d] = 0.95$$

となるような d を求めると、

$$0.95 \approx P\left[\left|N\left(m, \frac{75^2}{100}\right) - m\right| \leq d\right]$$

$$= P \left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{75}{10}} \right]$$

$$0.475 \approx P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{75}{10}} \right]$$

ですから標準正規分布表によって

$$\frac{d}{7.5} \approx 1.96, \quad d \approx 14.7$$

が分かります。すると今回のサンプル値である 2100 について、信頼度 95 %で

$$|2100 - m| \leq 14.7, \quad \text{従って} \quad 2085.3 \leq m \leq 2114.7$$

が成り立っていると言えます。従って求める信頼区間は [2085.3, 2114.7] です。

□

基本演習 9.9 次のの中から正しいものを 1 つ選んでください。

- (2) $Var[X] = 7, Var[Y] = 1$ で X, Y が独立であるとき、 $Var[X - 2Y] = 11$ です。
- (3) 母集団が正規分布に従っていれば、標本平均の分散は母集団の分散に一致します。
- (5) 2 次元の確率変数 (A, B) があって A, B それぞれの密度関数が $f(x), g(y)$ であれば、 (A, B) の密度関数は $f(x)g(y)$ です。

【解答例】 (2)。

□

基本演習 9.10 ある工場で生産しているケース入洗剤の内容量は、従来の測定によって母分散が $(3.5\text{g})^2$ の正規分布に従う事が知られています。

ある単位生産時間の製品の中から 25 個を無作為に抽出して測定したところ、平均値が 202.8g でした。内容量の母平均 m に対して信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】 この母集団からとった大きさ 25 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3.5^2}{25}\right)$ に従います。まず

$$0.95 = P[|\bar{X} - m| \leq d]$$

となる正数 d を求めます。

$$0.95 = P \left[\left| N \left(m, \frac{3.5^2}{25} \right) - m \right| \leq d \right] = P \left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{3.5}{5}} \right] = 2P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.7} \right]$$

$$0.475 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.7} \right]$$

ですから、標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{0.7} \approx 1.96, \quad \text{従って} \quad d \approx 1.372$$

が得られます。従って

$$P[|\bar{X} - m| \leq 1.372] \approx 0.95$$

ですから、今回のサンプル平均値が 202.8 だったことから、信頼度 95 %で

$$|202.8 - m| \leq 1.372, \quad \text{従って} \quad 201.428 \leq m \leq 204.172$$

が成立しており、求める信頼区間は [201.428, 204.172] になります。

□

基本演習 9.11 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

- (1) X の分散が 1 であるとき、 $-2X$ の分散は -4 である。
- (2) 正規分布に従う母集団からとった標本平均は正規分布に従う。

【解答例】 (1) ×、(2) ○、

□

基本演習 9.12 母集団 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。この母集団から大きさ 25 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプルの平均値が 54.3 でした。母平均の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】 母平均を m とします。するとこの母集団からとった大きさ 25 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{10^2}{25}\right)$ に従います。

そこでまず

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような $d > 0$ を求めます。

$$0.95 = P[|\bar{X} - m| \leq d]$$

$$= P \left[\left| N \left(m, \frac{10^2}{25} \right) - m \right| \leq d \right]$$

$$= P \left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{2} \right]$$

$$= 2P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{2} \right]$$

$$0.475 = P \left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{2} \right]$$

ですから、標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{2} \approx 1.96, \quad \text{従って} \quad d \approx 3.92$$

が分かります。以上から

$$P[|\bar{X} - m| \leq 3.92] \approx 0.95$$

が成り立ちますから、今回のサンプル値 54.3 について、信頼度 95 % で

$$|54.3 - m| \leq 3.92$$

$$54.3 - 3.92 \leq m \leq 54.3 + 3.92$$

$$50.38 \leq m \leq 58.22$$

が成り立つと言えます。従って求める信頼区間は $[50.38, 58.22]$ です。

□

基本演習 9.13 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

- (1) 大きさ 100 の標本平均の分散は母集団の分散より小さい。
- (2) 大きさ 100 の標本平均の分散は母集団の分散より大きい。
- (6) 正規分布に従う確率変数の 3 倍は正規分布に従う。

【解答例】 (1) ○、(2) ×、(6) ○。

□

基本演習 9.14 次の文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい（登場する平均値、分散、密度関数等は全て存在するものとします）。

- (1) 確率変数の和の分散 $\text{Var}[A + B]$ はそれぞれの分散の和 $\text{Var}[A] + \text{Var}[B]$ に一致します。
- (2) 標本平均の平均値は母集団の平均値より少し小さい。
- (3) 2 次元の確率変数 (X, Y) の密度関数が分かっているならば、成分確率変数 X, Y の密度関数も分かります。

【解答例】 (1) ×、(2) ×、(3) ○。

□

基本演習 9.15 次の文章は正しいでしょうか、間違っているでしょうか。○/×のみで答えて下さい。

- (2) 標本平均の平均値は母集団の平均値に一致します。
- (3) 標本のサイズが十分大きければ、母集団がどんな分布であっても標本平均は正規分布で良く近似されます。

【解答例】 (2) ○、(3) ○。

□

基本演習 9.16 ある工場でこの日に生産された部品の中から 100 個を任意抽出して強度試験をしたところ、平均強度は 157kg でした。経験から母集団（この日生産された部品の強度全体）の標準偏差は 3kg であると考えて良いことが分かっています。母平均の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】 母平均を m 、大きさ 100 の標本平均を A とします。標本サイズが大きいので、中心極限定理により A は正規分布 $N\left(m, \frac{3^2}{100}\right)$ で近似されます。

まず

$$P[|A - m| \leq d] = 0.95$$

となるような d を求めると、

$$0.95 \approx P\left[\left|N\left(m, \frac{3^2}{100}\right) - m\right| \leq d\right] = P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{3}{10}}\right]$$

$$0.475 \approx P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{\frac{3}{10}}\right]$$

ですから標準正規分布表によって

$$\frac{d}{\frac{3}{10}} \approx 1.96, \quad d \approx 0.588$$

が分かります。

すると今回のサンプル値である 157 について、信頼度 95 % で

$$|157 - m| \leq 0.588, \quad \text{従って} \quad 156.412 \leq m \leq 157.588$$

が成り立っていると言えます。従って求める信頼区間は $[156.412, 157.588]$ です。

□

基本演習 9.17 次の各文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。

- (1) 正規母集団における母平均の区間推定において、他の条件が同じであれば、信頼度を 95 % から 99 % に上げると信頼区間の幅は狭くなる。
- (2) 正規母集団における母平均の区間推定において、他の条件が同じであれば、信頼度を 95 % から 99 % に上げると信頼区間の幅は広くなる。
- (5) 標本平均の分散は母集団の分散より大きい。
- (7) 母集団が正規分布でなくても、標本のサイズが 100 であれば標本平均は正規分布に従う。

【解答例】 (1) ×、(2) ○、(5) ×、(7) ×。

□

基本演習 9.18 次の各文章が正しいか間違っているかを○／×のみで答えて下さい。

(2) 平均 13、分散 2 の母集団からとった大きさ 100 の標本平均は正規分布 $N(13, \frac{2}{100})$ に従います。

【解答例】 (2) ×、

□

基本演習 9.19 分散 3.5^2 の正規分布に従う母集団から大きさ 25 のサンプルをとってその平均値を調べたところ 209.7 でした。母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

【解答例】 母集団 $N(m, 3.5^2)$ からとった大きさ 25 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N(m, \frac{3.5^2}{25})$ に従いますので、まずは

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような正数 d を求めます。

標準化変形を行けば

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|\bar{X} - m| \leq d] \\ &= P\left[\left|N\left(0, \frac{3.5^2}{25}\right)\right| \leq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\frac{3.5}{5}}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{5d}{3.5}\right] \end{aligned}$$

なので、標準正規分布表から $\frac{5d}{3.5} \approx 1.96$ 、すなわち、

$$d \approx \frac{1.96 \cdot 3.5}{5} \approx 1.372$$

が得られます。以上から

$$P[|\bar{X} - m| \leq 1.372] \approx 0.95$$

ですから、今回のサンプル平均 209.7 について、信頼度 95 % で

$$\begin{aligned} |209.7 - m| &\leq 1.372 \\ 209.7 - 1.372 &\leq m \leq 209.7 + 1.372 \\ 208.328 &\leq m \leq 211.072 \end{aligned}$$

と言えます。従って求める信頼区間は $[208.328, 211.072]$ です。

□

基本演習 9.20 正規分布 $N(13, 2.5)$ に従う母集団からとった大きさ 10 の標本平均 $\bar{X}$ について、確率 $P[12.4 < \bar{X}]$ を求めて下さい。

【解答例】 $\bar{X}$ は正規分布 $N(13, \frac{2.5}{10})$ に従いますから、

$$\begin{aligned} P[12.4 < \bar{X}] &= P\left[12.4 < N\left(13, \frac{2.5}{10}\right)\right] \\ &= P[-0.6 < N(0, 0.25)] \\ &= P\left[-\frac{0.6}{0.5} < N(0, 1)\right] \\ &= P[-1.2 < N(0, 1)] \\ &= 0.5 + P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.2] \\ &\approx 0.5 + 0.3849 \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

です。

□