

12 2 項分布の Poisson 分布による近似

12.1 Poisson 分布

k	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
$P[X = j]$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\dots$

であるような確率変数の分布を、パラメーター λ のポアソン分布 (Poisson distribution) と言い、 $P_O(\lambda)$ で表します。

これは、任意の時刻において同じ確率でランダムに起こる事象があって、1 時間あたりの平均生起回数が λ であるとき、この事象が 1 時間中に起こる回数に対応した確率変数と考えられます。平均値・分散は共に λ です。

k	1 試合のゴール数が k である確率
0	$e^{-2.5} \approx 0.082$
1	$\frac{2.5}{1} e^{-2.5} \approx 0.205$
2	$\frac{2.5^2}{2!} e^{-2.5} \approx 0.257$
3	$\frac{2.5^3}{3!} e^{-2.5} \approx 0.213$
4	$\frac{2.5^4}{4!} e^{-2.5} \approx 0.133$

例 12.1.1 Maria Dolores Ugarte らの研究 (2016) によれば、サッカー W 杯における 1 試合の平均ゴール数は 2.5 であり、ポアソン分布が上手く適用されるようです。

例 12.1.2 1 時間に平均 4 回電話が掛かってくるコールセンターで、1 時間に電話が掛かってくる回数も、ポアソン分布で求めることができます。

1 時間当たりの平均コール数は 4 ですからパラメータ 4 のポアソン分布で計算します。

k	1 時間に k 回コールがある確率
0	0.0183
1	0.0732
2	0.1465
3	0.1954
4	0.1954
5	0.1563
6	0.1042
7	0.0595
8	0.0298
合計	0.9786

問題 12.1.3 10 年に平均 1 回氾濫する川が 1 年に 2 回氾濫する確率を求めてください。ただし、1 年に氾濫する回数はポアソン分布に従い、 $e^{-0.1} \approx 0.904$ とします。

『10 年に 1 回』というのを『1 年に 0.1 回』と解釈して考えましょう。

パラメータ 0.1 のポアソン分布に従うと考えれば、求める確率は以下の通り：

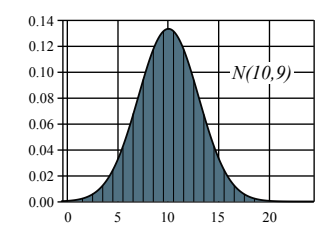
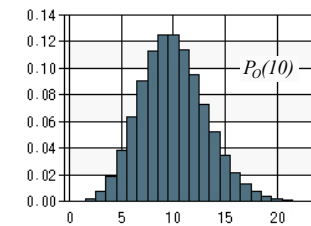
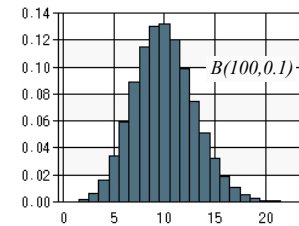
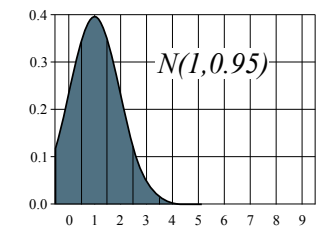
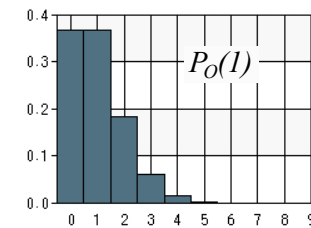
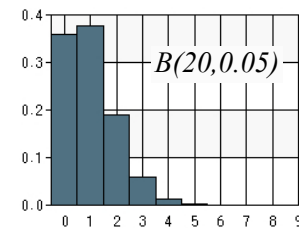
$$\frac{0.1^2}{2!} e^{-0.1} \approx 0.00452.$$

□

12.2 2 項分布の Poisson 分布による近似

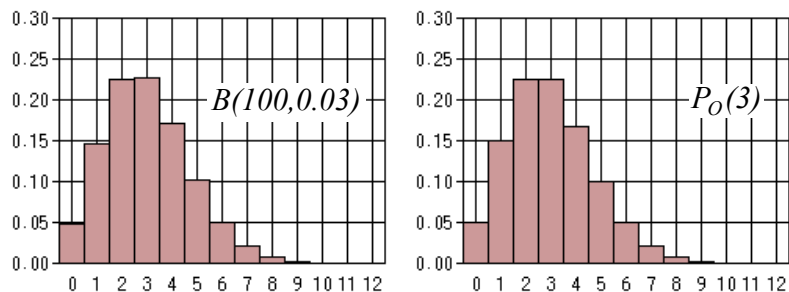
事実 12.2.1 2 項分布 $B(n, p)$ は、 n が十分大きく、 p が十分小さければ、具体的には $n \geq 20, p \leq 0.05$ であるか、あるいは、 $n \geq 100, np \leq 10$ であればパラメータ np の Poisson 分布 $P_O(np)$ で近似されます。

$$P[B(n, p) = j] \approx P[P_O(np) = j], \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$



問題 12.2.2 非常に多くの同種の製品の中に 3 % の不良品が含まれています。今この製品の中から任意に 100 個抽出するとき、不良品が 2 個以下である確率を求めてください。ただし、製品は非常に多いので抽出は復元抽出であるとみなして良いものとしします。 $e^{-3} \approx 0.0498$.

含まれる不良品の数 X は2項分布 $B(100, 0.03)$ に従います。基準を満たしている程度に n は大きく p は小さいので、パラメータ 3 の Poisson 分布 $P_O(3)$ で近似します。



すると

$$P[X \leq 2] \approx \sum_{k=0}^2 \frac{3^k}{k!} e^{-3} \approx (1 + 3 + 4.5) 0.0498 \approx 0.423$$

が得られます。

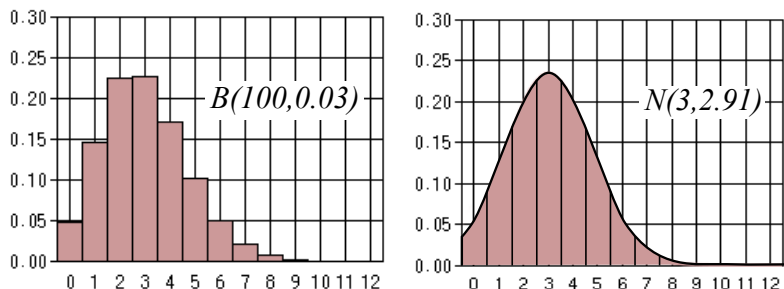
□

ちなみにコンピュータを使って2項分布で直接正確な値を計算すると 0.420 です。

また、 $np = 3 < 5$ なので正規分布による近似は利用できませんが、そこを敢えて近似してみると、分散は

$$100 \cdot 0.03 \cdot 0.97 = 2.91$$

ですから



$$P[N(100 \cdot 0.03, 100 \cdot 0.03 \cdot 0.97) \leq 2 + 0.5] \approx 0.3847$$

です。やはり Poisson 分布の方が良い近似になっています。

12.3 問題演習

● Poisson 分布

基本演習 12.1 自動車の通行台数が単位時間につき平均 5 台である道路において、単位時間に通行する自動車の台数を X とします。 X はポアソン分布に従うものとして、単位時間に通過する自動車の台数が 2 台以下である確率を求めてください。

ただし、 $e^{-5} \approx 0.00674$ とします。

基本演習 12.2 ある家では 1 日に平均 10 回の電話がかかるといいます。1 日にかかる電話の回数 X がポアソン分布に従うものとして、 X が 5 以上である確率を求めてください。

ただし、 $e^{-10} \approx 0.0000454$ とします。

● 2項分布の Poisson 分布による近似

基本演習 12.3 袋の中に 1000 個の玉が入っていて、そのうち 4 個が赤玉です。いま袋の中から 1 個ずつ 500 回復元抽出するとき、赤玉がちょうど 5 回出る確率を求めてください。ただし、 $e^{-2} \approx 0.135$ とします。

基本演習 12.4 当たりくじが 1000 本中 3 本入っているくじを 100 本買ったとき、当たりくじが 2 本以上含まれている確率を求めてください。ただし、このくじは極めて多数売られているため、復元抽出したとみなせるとし、 $e^{-0.3} \approx 0.741$ とします。

基本演習 12.5 りんごを 250 個ずつ箱に詰めます。箱詰めされたりんごは平均して 0.8 % が腐ります。箱詰めりんごを 1 箱開けたとき、腐ったりんごが 3 個以上入っている確率を求めてください。ただし、 $e^{-2} \approx 0.135$ とします。

● 2項分布の正規分布による近似 (先週の演習問題・再掲)

基本演習 11.1 2項分布 $B(3, p)$ に従う確率変数 X の平均値 (期待値)・分散を 2項分布の分布表から計算して下さい。

基本演習 11.2 [教科書 例題 15.6] 正常な硬貨を 400 回投げて表の出る回数を確率変数 X とするとき、 $P[190 \leq X \leq 210]$ を求めて下さい (半整数補正あり)。

基本演習 11.3 [教科書 練習問題 16-7] 正常なサイコロをくりかえし投げて実際に 1 の目が出る割合とその数学的確率 $\frac{1}{6}$ との差が 0.1 以下になる確率を考えます。その確率が 95 % 以上であるようにするためには少なくとも何回投げれば良いでしょうか。ただし、正規分布で近似するときに $\frac{1}{2}$ の補正はしなくて結構です。

基本演習 11.4 [教科書 練習問題 15-5] 袋の中に赤玉 3 個と白玉 7 個が入っています。その中から復元抽出法で 1 個ずつ玉を繰り返し取り出すとき赤玉の出た回数を X で表すことにします。

- (1) 100 回取り出すとき $P[X < 27 \text{ 又は } 33 < X]$ を求めて下さい。
- (2) 1000 回取り出すとき $P[X < 270 \text{ 又は } 330 < X]$ を求めて下さい。