13　仮説検定

13.1　サンプル調査

本来 100 であるべき値が、サンプル調査で 200 と出たら、これはどう考えても『おかしい』と思うでしょう。ではサンプル調査の結果が 120 だったらどうでしょう？　２割増しですからやっぱりおかしいでしょうか。では 95 だったらどうでしょう。102 だったら・・・

これは一概にどうこう言える話ではありません。母集団の分布の特性にもよります（元々分散が小さいなど）し、どう云う目的で管理している値なのかにもよるでしょう。

例えば『100g』と明記しているお惣菜の内容量であったならば、100 より小さい値であってはならないわけで、100 より小さい場合には営業停止を喰らう大問題です。

これがネジのサイズの数値であれば、大きくても小さくても問題となるでしょうし、許容される誤差はあらかじめ規格で決められているはずです。

13.2　ずれの限度の設定

そこで、まず想定値からどれだけずれた値が出たら『おかしいので対応策を考えアクションを起こす』と判断するかを前もって決めておきます。想定値より大きくても小さくても困るような場合は想定値の両側に『これ以上ずれたらまずいでしょうライン』を設定し、サンプル値がこのラインを超えたら、現実値は想定値から『許容できないほど大きくずれている』と判断します。

また、大きいかどうかだけが知りたいのであれば、想定値より大きい側（右側）のみに、小さいかどうかだけ知りたいのであれば想定値より小さい側（左側）にラインを設定し、サンプル値がこのラインを超えたら、現実値は想定値よりも許容できないほど大きい、あるいは許容できないほど小さいのだと判断します。

例えば母集団の平均値が問題となっている場合を考えます。母集団が正規分布であるか、そうでなくてもサンプルサイズを大きく取れるのであれば、標本平均は正規分布に従うと考えて良いので、更に母分散が分かっているか又はサンプルの分散で代用できるのであれば、標本平均の分布の山の形は確定しています（中心の平均値のみ不明)。

この場合、平均からどの程度のずれの出る確率がどの程度であるかは計算することが出来るので、例えば中心である平均値から大きくずれた両側に対称に確率 0.025 の領域を設定し、『この領域に入るぐらいに大きくズレることはない』のだと割り切って考えます。

例えば母平均が想定値 100 であると仮定した時に、計算により上記の領域を設定します。その上で採取されたサンプルの平均値がこの領域内にもし入るようであれば、『母平均が 100 であると仮定すると、「起こらない」と割り切ったほど小さな確率の現象が起きた』ことになり、これはあり得ないことなので『母平均が 100 であると仮定したのが間違いだったのだ』と解釈します。つまり、現実の母平均は想定した値 100 ではないと判断されるわけです。このように設定された領域のことを『棄却域』と呼んでいます。

ただ忘れてならないのはこの判断は間違っているかも知れないうえに、正しいのか間違いなのかを知る手段すらないということです。そうである以上は、ある程度の間違った判断をしてしまうリスクは承知の上で（リスクを負って）判断しなければなりません。

また、『あり得ない』かどうかの線引きをどの程度の確率で行うのかは、状況によって違う可能性があります。0.01 ならあり得ないと考える場合もあるでしょう。この線引きの閾値を有意水準と呼んでいて、多くの場合 0.05（5%）あるいは 0.01（1%）が使われます。

13.3　仮説検定の考え方

まず大前提として、母集団の平均値に関して、例えば『平均値が 100 であるかどうかが知りたい』であるとか、『平均値が 100 より小さいかどうかが知りたい』などと云った形で何らかの問題意識があります。そしてこの問題をサンプル調査によって『解決』しようと考えています。何の問題意識もなければわざわざサンプル調査などしません。

今回は『母集団の平均値が 100 であるかどうかが知りたい』と仮定しておきます。

問題：母集団の平均値は 100 であるか？

まず最初に『起こらない』と判断する閾値である『有意水準』を設定します。今回は 0.05 に設定しますが、必要に応じて 0.1 や 0.01 などにする場合もあります。

有意水準：0.05

次に、最初に掲げた問題に呼応して平均値が 100 であると仮定します。この仮定を普通帰無仮説と呼んでいます。

帰無仮説：母集団の平均値は 100 である。

なぜ『帰無』なのかと言うと、この仮説はサンプル調査によって相応の結果が出れば『無に帰せたい』、つまり否定したいと云う思惑から来ています。ただし、この『否定』

は論理的な否定ではありません。なぜなら袋の中身が本当はどうなっているのかは誰にも分からないからです。『否定』したとしてもその判断は間違っているかも知れないのです。そう云う事情からこれを『否定』とは呼ばずに『棄却』と呼ぶことにします。

つまり、サンプル調査によって相応の結果が出た場合に帰無仮説を棄却するのです。

で、どんな結果が出たら『棄却』するのかと言うと、それがさっき定めた有意水準を超えるズレが検出された場合です。例えば計算によって

$$P\left[\left|\bar{X}-100\right|\geq 5\right]=0.05$$

だったとしましょう。この場合棄却されるような値の範囲は $(-\infty,95]\cup[105,\infty)$ であり、これを『棄却域』と呼びます。有意水準を変えれば当然棄却域は変わります。

$$\boxed{\text{棄却域：}(-\infty,95]\cup[105,+\infty)}$$

以上でサンプル調査の準備が整いました（特に有意水準の設定はサンプル採取の前に行われなければなりません。サンプル値を見てから手心を加えてはなりません)。

さて、今回実際にサンプル調査をしたところ、その平均が 110 だったとしましょう。これは事前に設定された有意水準 0.05 に対応した棄却域に入っています。従って帰無仮説が正しいと仮定してしまうと、今回のサンプル値は、『起こり得ない』ことが起きたことを意味しており、最初の仮説が間違っていたと判断されます。

どうでしょうか？　背理法による議論に良く似ていると思いませんか。

$$\text{背理法：}\quad \boxed{\text{仮定}}\Rightarrow\boxed{\text{計算}}\Rightarrow\boxed{\text{矛盾}}\Rightarrow\boxed{\text{仮定の否定}}$$

$$\text{仮説検定：}\quad \boxed{\text{仮説}}\Rightarrow\boxed{\text{計算}}\Rightarrow\boxed{\text{おかしい}}\Rightarrow\boxed{\text{仮説の棄却}}$$

13.4　母平均の仮説検定

問題 13.4.1 ある工場で生産している製品の重さは、通常は平均値が 80g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、その平均値に疑義が生じています（分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします)。正しく生産されているか調べるために、ある日の製品の中から 100 個のサンプルを抽出して有意水準 0.05 で仮説検定をする事になりました。

実際にサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 81.1g でした。この日の製品は平常通りの重さであると言えるでしょうか？

まず次の帰無仮説が正しいと仮定します：

帰無仮説 H_0：母平均は 80g である。

すると母集団 X（この日の製品の重量全体）は正規分布 $N(80,5^2)$ に従い、この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は $N\left(80,\frac{5^2}{100}\right)$ に従います。そこでまず

$$P\left[\left|\bar{X}-80\right|\geq d\right]\approx 0.05$$

となるような d を求めると

$$\begin{aligned}
0.05 &= P\left[\left|\bar{X}-80\right|\geq d\right]=P\left[\left|N\left(0,\frac{1}{4}\right)\right|\geq d\right]\\
0.95 &= P\left[\left|N\left(0,\frac{1}{4}\right)\right|\leq d\right]=P\left[|N(0,1)|\leq\frac{d}{\frac{1}{2}}\right]\\
0.475 &= P\left[0\leq N(0,1)\leq 2d\right]
\end{aligned}$$

となって標準正規分布表により $2d\approx 1.96$、従って $d\approx 0.98$ です。

従って

$$P\left[\left|\bar{X}-80\right|\geq 0.98\right]\approx 0.05$$

すなわち

$$P\left[\bar{X}\in(-\infty,79.02]\cup[80.98,\infty)\right]\approx 0.05$$

が成り立っており、有意水準 5 %の（両側）棄却域は $(-\infty,79.02]\cup[80.98,\infty)$ です。

実際のサンプルの平均値 81.1 は今求めた棄却域に入っています。従って（帰無）仮説は棄却され、この日の製品の平均重量は 80g ではないと判断されます。

もしも有意水準として 1 %を採用するなら、次のような $d>0$ を求めます：

$$P\left[\left|\bar{X}-80\right|\geq d\right]=0.01.$$

すると計算により（略）$d\ \sim\ 1.2875$ が得られますから、この場合の両側棄却域は $(-\infty,78.7125]\cup[81.2875,\infty)$ となり、今回のサンプル値はこの棄却域に入っていません。つまり、このサンプルはそれほどレアなものとは言えないわけで、ある意味普通のことが起きているだけの話ですから、最初に立てた仮説に文句を言う筋合いはありません。従ってこのような場合には『帰無仮説を棄却するに足る合理的な理由は存在しない』とし、『この日の製品の平均重量は 80g でないとは言えない』、要するに消極的な意味で『平均重量は 80g である』と判断する事になります。 □

母分散が不明である場合はサンプル数 30 以上であればサンプルの分散・不偏分散によって代用出来ます。また、母分布が不明であるときは、やはりサンプル数が 50 以上であれば中心極限定理によって正規分布の場合と同様に計算されます。

13.5　区間推定との関係

同じ母集団に対して同じサンプル結果を元に母平均の信頼区間を求めてみると以下のようになります。

問題 13.5.1 ある工場で生産している製品の重さは、標準偏差が 5g の正規分布をしています。ある日の製品の中から 100 個のサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 81.1g でした。この日の製品の重さの平均値の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

この日の製品それぞれの重さデータの全体を母集団とし、その平均値を p とします。この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(p, \frac{5^2}{100}\right)$ に従います。

$$P[|\bar{X}-p| \leq d] = 0.95$$

となるような d を求めると、

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|\bar{X}-p| \leq d] \\ &= P\left[\left|N\left(0, \frac{5^2}{100}\right)\right| \leq d\right] \\ &= P[|N(0,1)| \leq 2d] \\ 0.475 &= P[0 \leq N(0,1) \leq 1] \end{aligned}$$

から $2d \approx 1.96$、従って $d \approx 0.98$ が得られますから、今回のサンプル平均 81.1 について、信頼度 95 %で

$$\begin{aligned} |81.1-p| &\leq 0.98 \\ 80.12 \leq p &\leq 82.08 \end{aligned}$$

が成立しますから、求める信頼区間は $[80.12, 82.08]$ です。 □

従って母平均の想定値である 80 はこの信頼区間に入っていません。『だから』母平均は 80 ではないと言える、そう云うことです。

13.6　片側検定の場合

問題 13.6.1 ある工場で生産している製品の重さは、通常は平均値が 80g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、最近ちょっと重いのではないかとの疑義が生じています（分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします）。正しく生産されているか調べるために、ある日の製品の中から 100 個のサンプルを抽出して調査をする事になりました。

実際にサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 80.9g でした。この日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。有意水準 5 %で検定して下さい。

今回問題となっているのは母平均が 80g であるかどうかではなくて、『母平均が 80g より大きいかどうか』です。大きくなければ、小さい分にはどんなに小さくても構わないわけです。

問題：母集団の平均値は 80 より大きいか？

この場合、平均値の想定値である 80g の両側に棄却域を設定してしまうと、80g よりもずっと小さなサンプル結果が出た場合にも帰無仮説は棄却されて仕舞います。出来れば 80g よりずっと大きなサンプル結果が出た場合だけ帰無仮説を棄却し、母平均は通常より大きいんだと結論したい筈です。

帰無仮説：母集団の平均値は 80 である。

そこで、母平均は 80 であると仮定（帰無仮説）したうえで、この日の製品の中から取り出す大きさ 100 の標本平均を $\bar{X}$ として

$$0.05 = P\left[d \leq \bar{X}-80\right]$$

となる $d>0$ を求めることにします。$\bar{X}-80$ は $N\left(0, \frac{1}{4}\right)$ に従いましたから

$$\begin{aligned} 0.05 &= P\left[d \leq \bar{X}-80\right] = P\left[\frac{d}{\frac{1}{2}} \leq N(0,1)\right] = 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq 2d\right] \\ 0.45 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq 2d\right] \end{aligned}$$

となり、正規分布表から $2d \approx 1.645$、つまり $d \approx 0.82$ が分かります。これは

$$0.05 \approx P\left[80.82 \leq \bar{X}\right] = P\left[\bar{X} \in [80.82, \infty)\right]$$

を意味しますので、今回は棄却域を $[80.82, \infty)$ として判断をします（サンプル値が重い方に大きくずれた場合のみ棄却されるように設定している）。

$\boxed{\text{棄却域：}[80.82, \infty)}$

今回のサンプル値 80.9 はこの片側棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、この日は平常よりも重かったと判断されます。 □

母平均が 80g であるかどうかが問題であれば、大きい側にも小さい側にも対称に棄却域を設定し、サンプル値が棄却域に入った場合には母平均は 80g ではないと判断します。これを両側検定と言います。

母平均が 80g より重いかどうかが問題であれば、重い側のみに棄却域を設定し、サンプル値が棄却域に入った場合には母平均は 80g より重いと判断します。こちらは（右）片側検定と言います。

どちらも最初に仮定する帰無仮説は同一ですが、設定する棄却域に違いがあるので帰無仮説が棄却されたときに何が言えるかは違っています。ここを『対立仮説』として明示しておいた方が良いでしょう。

■ 80g かどうかが問題の場合（両側検定）

帰無仮説：　この日の重さの平均値は 80g である
対立仮説：　この日の重さの平均値は 80g ではない
棄却域：　$(-\infty, 79.02] \cup [80.98, \infty)$

■ 80g より重いかどうかが問題の場合（右片側検定）

帰無仮説：　この日の重さの平均値は 80g である
対立仮説：　この日の重さの平均値は 80g より重い
棄却域：　$[80.82, \infty)$

13.7 問題演習

基本演習 13.1 ある機械が袋に詰める砂糖の重さは標準偏差 5g の正規分布に従っており、平均が 100g になるように調整されています。機械が正しく調整されているかどうか確かめるために、無作為に 9 個の袋を取って砂糖の重さを測ったところ平均は 102.4g でした。この機械は正しく調整されているか有意水準 5 %で検定して下さい。

基本演習 13.2 多数の人口をもつある都市の中学一年生に数学の学力テストを一斉に実施しました。受験生から 100 名を無作為に抽出し得点を調べたところ、得点の平均は 52.2 でした。全受験生の得点は標準偏差 10.5 の正規分布に従うことが分かっているものとします。このとき仮説『全受験生の得点の平均は 50 点である』を、有意水準 5 %で検定して下さい。また 1 %でも検定して下さい。

基本演習 13.3 ある工場の資料によると、機械 A を用いて作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 70 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.73g、標準偏差が 0.23g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また、標本数が大きいのでその標準偏差は 0.23g であるとし、平均重量が変化したかどうか有意水準 5 %で仮説検定して下さい。

基本演習 13.4 ある工場で生産される糸の強さは平均 170.8g の重さに耐えるように作られていますが、最近糸が弱くなったと苦情が寄せられています。糸の強さ X は正規分布 $N(m, 5.5^2)$ に従うことが経験的に分かっており、平均 m は 170.8g よりも小さいことが予想されます。今製品から 50 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均は 169.5g でした。糸は弱くなったと言って良いでしょうか？有意水準 0.05 で検定して下さい。また、同様に有意水準 0.01 でも検定して下さい。

問題演習解答

基本演習 13.1 ある機械が袋に詰める砂糖の重さは標準偏差 5g の正規分布に従っており、平均が 100g になるように調整されています。機械が正しく調整されているかどうか確かめるために、無作為に 9 個の袋を取って砂糖の重さを測ったところ平均は 102.4g でした。この機械は正しく調整されているか有意水準 5 %で検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0： 『重さの平均値は 100 グラムである』
対立仮説 H_1： 『重さの平均値は 100 グラムではない』

まず帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると今回の 9 個のサンプルは $N(100, 5^2)$ に従う母集団から取った大きさ 9 のサンプルと考えられ、同母集団からの大きさ 9 の標本平均を $\bar{X}$ とすればこれは $N\left(100, \frac{5^2}{9}\right)$ に従うことが分かります。

問題は機械が正しく調整されているかどうかを問うていますから有意水準 5 %の両側棄却域を求めれば良く、

$$\begin{aligned}
0.05 &= P[|\bar{X} - 100| \geq d] \\
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{5^2}{9}\right)\right| \geq d\right] \\
&= 2P\left[N\left(0, \frac{5^2}{9}\right) \geq d\right] \\
0.025 &= P\left[N(0,1) \geq \frac{d}{\frac{5}{3}}\right] \\
&= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{3d}{5}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{3d}{5}\right]
\end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{3d}{5} \sim 1.96$ すなわち $d \sim 3.27$ が分かります。これは結局

$$P[|\bar{X} - 100| \geq 3.27] \sim 0.05$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 96.73, \quad 103.27 \leq \bar{X}$ となります。

今回の測定値 102.4 はここに入らないので、仮説を棄却するだけの合理的な理由はなく、機械は正しく調整されていないとは言えないと判断されます。 □

基本演習 13.2 多数の人口をもつある都市の中学一年生に数学の学力テストを一斉に実施しました。受験生から 100 名を無作為に抽出し得点を調べたところ、得点の平均は 52.2 でした。全受験生の得点は標準偏差 10.5 の正規分布に従うことが分かっているものとします。このとき仮説『全受験生の得点の平均は 50 点である』を、有意水準 5 %で検定して下さい。また 1 %でも検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0： 『全受験生の得点の平均は 50 点である』
対立仮説 H_1： 『全受験生の得点の平均は 50 点ではない』

まず仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると、全受験生の得点は正規分布 $N(50, 10.5^2)$ に従うことが分かりますから、ここからとった大きさ 100 の標本平均を $\bar{X}$ とすれば、$\bar{X}$ は正規分布 $N\left(50, \frac{10.5^2}{100}\right)$ に従うと言えます。

問題は平均が 50 点である事が言えるかどうかですから両側検定としてまず有意水準 5 %の棄却域を計算します。

$$\begin{aligned}
0.05 &= P[|\bar{X} - 50| \geq d] \\
&= P[|N(0, 1.05^2)| \geq d] \\
&= 2P[N(0, 1.05^2) \geq d] \\
0.025 &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
0.475 &= P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
&= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{1.05}\right]
\end{aligned}$$

から正規分布表を参照して $\frac{d}{1.05} \sim 1.96$ すなわち $d \sim 2.06$ が分かります。これは結局

$$P[|\bar{X} - 50| \geq 2.06] \sim 0.05$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 47.94, \quad 52.06 \leq \bar{X}$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 52.2 はこの棄却域に入っていますから、仮説 H_0 は棄却され、全受験生の平均得点は 50 点ではないと判断されます。

次に有意水準 1 %の棄却域を計算します。

$$0.01 = P[|\bar{X} - 50| \geq d]$$

$$
\begin{aligned}
&= P[|N(0, 1.05^2)| \geq d] \\
&= 2P[N(0, 1.05^2) \geq d] \\
0.005 &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
0.495 &= P[0 \leq N(0, 1.05^2) \leq d] \\
&= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{1.05}\right]
\end{aligned}
$$

から正規分布表を参照して $\frac{d}{1.05} \sim 2.575$ すなわち $d \sim 2.70$ が分かります。これは結局

$$P[|\bar{X} - 50| \geq 2.70] \sim 0.01$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 47.30, \quad 52.70 \leq \bar{X}$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 52.2 はこの棄却域に入っていませんから、仮説 H_0 を棄却するに足る理由はないと考えられ、全受験生の平均得点は 50 点でないとは言えないと判断されます。 □

基本演習 13.3 ある工場の資料によると、機械 A を用いて作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 70 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.73g、標準偏差が 0.23g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また、標本数が大きいのでその標準偏差は 0.23g であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準 5 % で仮説検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0： 『B で作られた製品の平均重量は 5.68g である』
対立仮説 H_1： 『B で作られた製品の平均重量は 5.68g ではない』

仮説 H_0 を仮定します。すると問題に書かれている仮定から、B で作られた製品全体の中から取った大きさ 70 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(5.68, \frac{0.23^2}{70}\right)$ に従います。

問題は平均重量に変化があったかどうかですから両側検定として有意水準 5 %の棄却域を取ります。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めれば良いわけですが、標準化して

$$
\begin{aligned}
&= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{70}\right)\right| \geq d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \geq \frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}}\right] \\
&= 1 - 2P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}}\right]
\end{aligned}
$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{\frac{0.23}{\sqrt{70}}} \sim 1.96$、つまり、$d \sim 0.054$ が分かります。これは

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq 0.054]$$

を意味し、今回の具体値 5.73 はこの棄却域に入っていません。従って仮説を棄却するに足る理由はないと考えられ、平均重量が変化したとは言えないことが分かります。 □

基本演習 13.4 ある工場で生産される糸の強さは平均 170.8g の重さに耐えるように作られていますが、最近糸が弱くなったと苦情が寄せられています。糸の強さ X は正規分布 $N(m, 5.5^2)$ に従うことが経験的に分かっており、平均 m は 170.8g よりも小さいことが予想されます。今製品から 50 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均は 169.5g でした。糸は弱くなったと言って良いでしょうか？有意水準 0.05 で検定して下さい。また、同様に有意水準 0.01 でも検定して下さい。

【解答例】 帰無仮説 H_0： 『糸の強さの平均は 170.8 である』
対立仮説 H_1： 『糸の強さの平均は 170.8 より小さい』

まず仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると、ここからとった大きさ５０の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(170.8, \frac{5.5^2}{50}\right)$ に従うと言えます。

問題は糸の強さが弱いかどうかですから平均値より小さい側の片側検定としてまず有意水準５%の棄却域を計算します。

$$0.05 = P[\bar{X} - 170.8 \leq -d]$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left[N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq -d\right] \\
0.05 &= 0.5 - P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\
0.45 &= P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\
&= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{5\sqrt{2}d}{5.5}\right]
\end{aligned}
$$

から正規分布表を参照して $\frac{5\sqrt{2}d}{5.5} \approx 1.645$ すなわち $d \approx 1.28$ が分かります。これは結局

$$P[\bar{X} - 170.8 \leq -1.28] \approx 0.05$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 169.52$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 169.5 はこの棄却域に入っていますから、仮説 H_0 は棄却され、糸は弱くなったと判断されます。

次に有意水準１%の棄却域を計算します。

$$
\begin{aligned}
0.01 &= P[\bar{X} - 170.8 \leq -d] \\
&= P\left[N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq -d\right] \\
0.01 &= 0.5 - P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\
0.49 &= P\left[0 \leq N\left(0, \frac{5.5^2}{50}\right) \leq d\right] \\
&= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{5\sqrt{2}d}{5.5}\right]
\end{aligned}
$$

から正規分布表を参照して $\frac{5\sqrt{2}d}{5.5} \approx 2.325$ すなわち $d \approx 1.81$ が分かります。これは結局

$$P[\bar{X} - 170.8 \leq -1.81] \approx 0.01$$

を意味しますから、棄却域は $\bar{X} \leq 169$ となります。

今回の調査でのサンプル値である 169.5 はこの棄却域に入りませんから、仮説 H_0 を棄却するに足る理由はないと考えられ、糸は弱くなったとは言えないと判断されます。 □

ただし近似値の取り方によっては棄却域に入るかどうかの判定が上の逆になる場合もあります。