

13 仮説検定

13.1 サンプル調査

本来 100 であるべき値が、サンプル調査で 200 と出たら、これはどう考えても『おかしい』と思うでしょう。ではサンプル調査の結果が 120 だったらどうでしょう？ では 95 だったらどうでしょう。102 だったら・・・

13.2 ずれの限度の設定

そこで、『これ以上ずれたらまずいでしょうライン』を設定しておいて、サンプル値がこのラインを超えたら、現実値は想定値から『許容できないほど大きくずれている』と判断します。

例えば母平均が問題となっている場合、平均値から大きくずれた両側に対称に確率 0.025 の領域を設定し (両側で 0.05)、『こんなに小さな確率の領域に入るぐらいに大きくズれることはない』のだと割り切って考えます。

具体的に母平均が 100 であると仮定した時に、サンプルの平均値がこの領域内に入るようであれば、『母平均が 100 であると仮定すると、「起こらない」と割り切ったほど小さな確率の現象が起きた』ことになり、これは『あり得ないこと』なので『母平均が 100 であると仮定したのが間違いだったのだ』と解釈します。このように設定された領域のことを『棄却域』と呼んでいます。

13.3 仮説検定の考え方

問題：母集団の平均値は 100 であるか？

まず最初に『起こらない』と判断する確率の閾値である『有意水準』を設定します。今回は 0.05 に設定しますが、必要に応じて 0.1 や 0.01 などにする場合もあります。

有意水準：0.05

次に、最初に掲げた問題に呼応して平均値が 100 であると仮定します。

帰無仮説：母集団の平均値は 100 である。

例えば計算によって

棄却域： $(-\infty, 95] \cup [105, +\infty)$

だとします。実際にサンプル調査をしたところ、その平均が 110 だった場合、これは事前に設定された棄却域に入っています。従って帰無仮説が正しいと仮定してしまうと、今回のサンプル値は、『起こり得ない』ことが起きたことを意味しており、最初の仮説が間違っていたと判断されます。

13.4 母平均の仮説検定

問題 13.4.1 ある工場で生産している製品の重さは、通常は平均値が 80g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、その平均値に疑義が生じています (分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします)。正しく生産されているか調べるために、ある日の製品の中から 100 個のサンプルを抽出して有意水準 0.05 で仮説検定をする事になりました。

実際にサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 81.1g でした。この日の製品は平常通りの重さであると言えるでしょうか？

まず次の帰無仮説が正しいと仮定します：

帰無仮説 H_0 ：母平均は 80g である。

すると母集団 X (この日の製品の重量全体) からとった大きさ 100 の標本平均 \bar{X} は $N\left(80, \frac{5^2}{100}\right)$ に従います。そこでまず

$$P[|\bar{X} - 80| \geq d] \approx 0.05$$

となるような d を求めると (計算略) $d \approx 0.98$ です。従って

$$P[|\bar{X} - 80| \geq 0.98] \approx 0.05 \quad \text{すなわち} \quad P[\bar{X} \in (-\infty, 79.02] \cup [80.98, \infty)] \approx 0.05$$

が成り立っており、有意水準 5% の (両側) 棄却域は $(-\infty, 79.02] \cup [80.98, \infty)$ です。

実際のサンプルの平均値 81.1 は今求めた棄却域に入っていますから、(帰無) 仮説は棄却され、この日の製品の平均重量は 80g ではないと判断されます。

もしも有意水準として 1% を採用するならば、計算により棄却域は $(-\infty, 78.7125] \cup [81.2875, \infty)$ となり、今回のサンプル値はこの棄却域に入っていません。このような場合には『帰無仮説を棄却するに足る合理的な理由は存在しない』とし、『この日の製品の平均重量は 80g でないとは言えない』、要するに消極的な意味で『平均重量は 80g である』と判断する事になります。□

13.5 区間推定との関係

同じ母集団に対して同じサンプル結果を元に母平均の信頼区間を求めてみると [80.12, 82.08] です。従って母平均の想定値である 80 はこの信頼区間に入っていない。『だから』母平均は 80 ではないと言える、そう云うことです。

13.6 片側検定の場合

問題 13.6.1 ある工場で生産している製品の重さは、通常は平均値が 80g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、最近ちょっと重いのではないかの疑義が生じています（分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします）。正しく生産されているか調べるために、ある日の製品の中から 100 個のサンプルを抽出して調査をする事になりました。

実際にサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 80.9g でした。この日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。有意水準 5% で検定して下さい。

問題：母集団の平均値は 80 より大きいか？

この場合 80g よりずっと大きなサンプル結果が出た場合だけ帰無仮説を棄却し、母平均は通常より大きいんだと結論したい筈です。

帰無仮説：母集団の平均値は 80 である。

そこで、母平均は 80 であると仮定（帰無仮説）したうえで、この日の製品の中から取り出す大きさ 100 の標本平均を \bar{X} として

$$0.05 = P[d \leq \bar{X} - 80]$$

となる $d > 0$ を求めることにします。（計算略）すると $d \approx 0.82$ が分かります。

$$0.05 \approx P[80.82 \leq \bar{X}] = P[\bar{X} \in [80.82, \infty)]$$

棄却域：[80.82, ∞)

今回のサンプル値 80.9 はこの片側棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、この日は平常よりも重かったと判断されます。□

■ 80g かどうかの問題の場合（両側検定）

帰無仮説：この日の重さの平均値は 80g である

対立仮説：この日の重さの平均値は 80g ではない

棄却域： $(-\infty, 79.02] \cup [80.98, \infty)$

■ 80g より重いかどうかの問題の場合（右片側検定）

帰無仮説：この日の重さの平均値は 80g である

対立仮説：この日の重さの平均値は 80g より重い

棄却域：[80.82, ∞)

13.7 問題演習

基本演習 13.1 ある機械が袋に詰める砂糖の重さは標準偏差 5g の正規分布に従っており、平均が 100g になるように調整されています。機械が正しく調整されているかどうか確かめるために、無作為に 9 個の袋を取って砂糖の重さを測ったところ平均は 102.4g でした。この機械は正しく調整されているか有意水準 5% で検定して下さい。

基本演習 13.2 多数の人口をもつある都市の中学一年生に数学の学力テストを一斉に実施しました。受験生から 100 名を無作為に抽出し得点を調べたところ、得点の平均は 52.2 でした。全受験生の得点は標準偏差 10.5 の正規分布に従うことが分かっているものとします。このとき仮説『全受験生の得点の平均は 50 点である』を、有意水準 5% で検定して下さい。また 1% でも検定して下さい。

基本演習 13.3 ある工場の資料によると、機械 A を用いて作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 70 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.73g、標準偏差が 0.23g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また、標本数が多いのでその標準偏差は 0.23g であるとし、平均重量が変化したかどうか有意水準 5% で仮説検定して下さい。

基本演習 13.4 ある工場で生産される糸の強さは平均 170.8g の重さに耐えるように作られていますが、最近糸が弱くなったと苦情が寄せられています。糸の強さ X は正規分布 $N(m, 5.5^2)$ に従うことが経験的に分かっており、平均 m は 170.8g よりも小さいことが予想されます。今製品から 50 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均は 169.5g でした。糸は弱くなったと言って良いでしょうか？ 有意水準 0.05 で検定して下さい。また、同様に有意水準 0.01 でも検定して下さい。