14　仮説検定その２　片側検定・母比率の検定

14.1　片側検定

問題 14.1.1 ある工場で生産している製品の重さは、通常は平均値が 80g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、最近ちょっと重いのではないかとの疑義が生じています（分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします）。正しく生産されているか調べるために、ある日の製品の中から 100 個のサンプルを抽出して調査をする事になりました。

実際にサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 80.9g でした。この日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。有意水準 5 %で検定して下さい。

問題：母集団の平均値は 80 より大きいか？

帰無仮説：母集団の平均値は 80 である。

重たい側に大きくずれた場合にだけ仮説が棄却されるように、棄却域を片側だけに設定しておけば、『仮説が棄却⇒重い』と判断できます。

この日の製品の中から取り出す大きさ 100 の標本平均を $\bar{X}$ として

$$0.05 = P\left[80 + d \leq \bar{X}\right]$$

となる $d > 0$ を求めると $d \approx 0.82$ が分かります。

$$0.05 \approx P\left[80.82 \leq \bar{X}\right] = P\left[\bar{X} \in [80.82, \infty)\right]$$

（右片側）棄却域：$[80.82, \infty)$

今回のサンプル値 80.9 はこの片側棄却域に入っていますから帰無仮説は棄却され、この日は平常よりも重かったと判断されます。 □

帰無仮説は両側検定の場合と同一ですが、設定する棄却域に違いがあるので帰無仮説が棄却されたときに何が言えるかは違っています。ここを『対立仮説』として明示しておいた方が良いでしょう。

■ 80g かどうかが問題の場合（両側検定）

帰無仮説：　この日の重さの平均値は 80g である
対立仮説：　この日の重さの平均値は 80g ではない
棄却域：　$(-\infty, 79.02] \cup [80.98, \infty)$

■ 80g より重いかどうかが問題の場合（右片側検定）

帰無仮説：　この日の重さの平均値は 80g である
対立仮説：　この日の重さの平均値は 80g より重い
棄却域：　$[80.82, \infty)$

基本演習 14.1 健常者の血清カルシウムの平均値は 9.8mg/dl です。今回無作為に選んだ 16 人の副甲状腺機能低下症患者の血清カルシウムの平均は 7.4mg/dl でした。副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値が健常者よりも低いかどうかを、有意水準 0.05 で仮説検定ししてください。

ただし副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの全体は正規分布に従い、標準偏差は 0.5mg/dl であるとします。

14.2　母比率の仮説検定

問題 14.2.1 ある都市で、全有権者の中から 500 人をランダムに選んで現内閣を支持するか否かを聞いたところ、330 人が支持すると答えました。

(1) 母比率 p の 95 %信頼区間を求めてください。ただし、p の値は概ね 0.5 から 0.8 の間であることは分かっているものとします。

(2) 前回調査時の支持率を 70 %とするとき、今回の支持率は変化したといえるか、有意水準 5 %で検定してください。

(3) 前回までの支持率は 70 %に安定していたが、今回は諸般の事情から支持率の低下が取りざたされていた。今回支持率は低下したといえるか、有意水準 5 %で検定してください。

---

(1) 全有権者中の支持者の比率を p とすると、無作為に抽出した 500 人のサンプル中の支持者数 X は２項分布 $B(500, p)$ に従います。p の値は 0.5 から 0.8 の間であること

が分かっているとのことですから、

$$500p \geq 250, \quad 500(1-p) \geq 100$$

であって、２項分布 $B(500, p)$ は正規分布 $N(500p, 500p(1-p))$ で近似されます。

ここで X の分散は本来 $500p(1-p)$ ですが、サンプル比率 $\frac{330}{500}$ を使って

$$500 \cdot \frac{330}{500} \cdot \frac{170}{500} = \frac{561}{5} = 112.2 \approx 10.59^2$$

で代用して、X を正規分布 $N(500p, 10.59^2)$ で近似し、

$$0.95 = P[|X - 500p| \leq d]$$

となるような $d > 0$ を求めると（半整数補正を行った場合は）、

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx P[|N(500p, 10.59^2) - 500p| \leq d + 0.5] \\ 0.475 &\approx P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{d+0.5}{10.59}\right] \end{aligned}$$

から $\frac{d+0.5}{10.59} \approx 1.96$、すなわち $d \approx 20.26$ が得られます。

以上から、今回のサンプル値 330 について、信頼度 0.95 で

$$\begin{aligned} |330 - 500p| &\leq 20.26 \\ 0.619 \leq p &\leq 0.701 \end{aligned}$$

が成り立ちますので、求める信頼区間は $[61.9\%, 70.1\%]$ です。

(2) 帰無仮説 H_0：『今回の支持率は 70 %である』
対立仮説 H_1：『今回の支持率は 70 %ではない』

まず帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると全有権者からとった 500 人のサンプル中の支持者数 X は２項分布 $B(500, 0.7)$ に従いますので、正規分布 $N(500 \cdot 0.7, 500 \cdot 0.7 \cdot 0.3)$ で近似されます。そこでまずは

$$0.05 = P[|X - 500 \cdot 0.7| \geq d]$$

となるような d を求めます（半整数補正あり）。

$$\begin{aligned} 0.05 &= P[|X - 500 \cdot 0.7| \geq d] \\ &= P[|B(500, 0.7) - 350| \geq d] \\ &\approx P[|N(350, 105) - 350| \geq d - 0.5] \\ d &\approx 20.59 \end{aligned}$$

となりますから、棄却域は $(-\infty, 329.41] \cup [370.59, \infty)$ です。

今回のサンプル値 330 はこの棄却域に入らないため、帰無仮説 H_0 を棄却するに足る合理的な根拠はないと判断され、今回の支持率は前回から変化したとは言えないことがわかります。

(3) 帰無仮説 H_0：『今回の支持率は 70 %である』
対立仮説 H_2：『今回の支持率は 70 %より低い』

まず帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると全有権者からとった 500 人のサンプル中の支持者数 X は２項分布 $B(500, 0.7)$ に従い、正規分布 $N(350, 105)$ で近似されます。そこで

$$0.05 = P[X \leq 500 \cdot 0.7 - d]$$

となるような d を求めます（半整数補正あり）。

$$\begin{aligned} 0.05 &= P[X \leq 500 \cdot 0.7 - d] \\ &= P[B(500, 0.7) \leq 350 - d] \\ &\approx P[N(350, 105) \leq 350 - d + 0.5] \\ d &\approx 17.36 \end{aligned}$$

であり、棄却域は $(-\infty, 332.64]$ となります。

今回のサンプル値 330 はこの棄却域に入っており、帰無仮説 H_0 は棄却され、今回の支持率は前回の 70 %よりも低くなったと判断されます。 □

14.3 問題演習

■片側検定の問題

基本演習 14.1 健常者の血清カルシウムの平均値は 9.8mg/dl です。今回無作為に選んだ 16 人の副甲状腺機能低下症患者の血清カルシウムの平均は 7.4mg/dl でした。副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの平均値が健常者よりも低いかどうかを、有意水準 0.05 で仮説検定ししてください。

ただし副甲状腺機能低下症の患者における血清カルシウムの全体は正規分布に従い、標準偏差は 0.5mg/dl であるとします。

基本演習 14.2 ある工場で生産される糸の強さは平均 170.8g の重さに耐えるように作られていますが、最近糸が弱くなったと苦情が寄せられています。糸の強さ X は正規分布 $N(m, 5.5^2)$ に従うことが経験的に分かっており、平均 m は 170.8g よりも小さいことが予想されます。今製品から 50 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均は 169.5g でした。糸は弱くなったと言って良いでしょうか？有意水準 0.05 で検定して下さい。また、同様に有意水準 0.01 でも検定して下さい。

基本演習 14.3 [教　練習問題 16-4] ある工場で生産している製品は通常重さの平均値が 80g、標準偏差が 4g の正規分布をしています。ある日の製品の中から 50 個の標本を抽出して測定したところ、重さの平均値が 80.8g でした。その日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。標準偏差は変わらないものとして有意水準 5 %で検定して下さい。

■母比率の仮説検定

発展演習 14.4 [教科書　練習問題 16-6] あるサイコロを 600 回無作為に投げたところ、1 の目が 118 回出ました。このサイコロは 1 の目が出やすいと言えるでしょうか。有意水準１%で検定して下さい。

■母平均の仮説検定総復習

基本演習 14.5 ある工場で作られる電球の寿命は標準偏差 100 時間の正規分布に従っています。計画では寿命の平均値は 1800 時間になるように製造されている筈ですがこの平均値に関して疑義が生じています。

そこでこの工場で製造された多数の電球の中から 25 個を抽出して寿命時間を測定したところ、その平均値は 1835 時間でした。以下の 3 通りで検定して下さい。

(1) 寿命時間の平均値は 1800 時間より長いと言えるか、有意水準 5 %

(2) 寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか、有意水準 5 %

(3) 寿命時間の平均値は 1800 時間と言えるか、有意水準 10 %

基本演習 14.6 [教　例題 16.4] ある工場では生産しているスチールボールの規格を直径 12mm±0.5mm としています。いま一つの製品ロットから次の個数を無作為に取り出して直径を測定したところ、どの場合も平均値 12.04mm、分散 0.12^2mm でした。それぞれの条件のもとでこのロットのスチールボールの直径の平均値は規格の中央値の 12mm であると言えるでしょうか。有意水準 5 %で検定して下さい。

(1) 20 個、直径の分布は正規分布、母標準偏差は 0.1mm。

(2) 80 個、母標準偏差は 0.1mm。

(3) 80 個、母標準偏差は不明。

(4) (1) と同じ条件で、平均値は 12mm より大きいと言えるかどうか。

基本演習 14.7 [教　問題 16.11] ある工場で製品の寿命時間は正規分布に従い、その標準偏差は 120 時間であることが分かっています。この会社では『当工場の製品の寿命の平均値は 1800 時間である』と公表しています。この工場の製品 10 個を無作為に抽出して寿命を測定したところ平均値が 1760 時間でした。この会社の公表は正しいと認められるでしょうか、有意水準 5 %で検定して下さい。

基本演習 14.8 [教　練習問題 16-1] ある工場で生産しているスチールパイプから 100 個取り出して直径を測定したところ、平均 20.1mm、分散 0.23^2mm でした。

(1) 直径の母平均 m の信頼度 99 %の信頼区間を求めて下さい。

(2) 直径の平均値 m は 20.0mm であると工場は言っています。その主張は正しいと言えるでしょうか、有意水準 1 %で検定して下さい。

基本演習 14.9 ある工場の資料によると、機械 A で作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られていますが、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 100 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.71g、標準偏差が 0.23g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また標準偏差はサンプル値の 0.23g であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準 5 %で仮説検定して下さい。