

15 総復習

標準正規分布表

$P[0 \leq N(0, 1) \leq z] = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$										
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

数表

λ	0.25	0.5	1	2	3	4
$e^{-\lambda}$	0.779	0.607	0.368	0.135	0.0498	0.0183
λ	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0.00674	0.00248	0.000912	0.000335	0.000123	0.0000454

近似定理

事実 1 [2 項分布の正規分布による近似 (半整数補正付き)] 2 項分布 $B(n, p)$ は、 p, q があまり小さくなく、 n が十分大きければ正規分布 $N(np, npq)$ で近似されます ($q = 1 - p$) :

$$P[v \leq B(n, p) \leq w] \approx P\left[v - \frac{1}{2} \leq N(np, npq) \leq w + \frac{1}{2}\right].$$

適用基準 : $np \geq 5, nq = n(1 - p) \geq 5$.

事実 2 [2 項分布のポアソン分布による近似] 2 項分布 $B(n, p)$ は、 p が十分小さく、 n が十分大きければパラメータ np のポアソン分布で近似されます。ただし、

k	0	1	2	...	k	...
$P[X = k]$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

であるような確率変数 X の分布をパラメーター λ のポアソン分布 $P_O(\lambda)$ と言い、平均・分散共に λ です。

適用基準 : $n \geq 20, p \leq 0.05$ または $n \geq 100, np \leq 10$.

事実 3 [中心極限定理] 平均 m 、分散 $v \neq 0$ である母集団 X からとった大きさ n の標本平均 $\bar{X}$ は n が十分大きい時には正規分布 $N\left(m, \frac{v}{n}\right)$ で近似されます。

適用基準 : $n \geq 50$.

事実 4 [母分散のサンプル値による代用] サンプルのサイズ n が大きければ、母集団の分散はサンプルの分散 (もしくはサンプルの不偏分散) で代用することが出来ます。

適用基準 : $n \geq 30$.

15.1 2023 A/W 定期試験

問題 1 ある製薬会社が、今回発売する新薬は 9 割の患者について、8 時間以内にアレルギー症状を治すことができると広告していますが、これは誇大広告ではないかとの疑義が生じているため、サンプル調査し仮説検定することになりました。

- (1) 両側検定・片側検定のいずれをすべきか理由をつけて教えてください。
- (2) 無作為に抽出した 200 人の患者に対してこの新薬を試用した結果、169 人については 8 時間以内に治りました。この製薬会社の広告の主張について有意水準 1 % で検定してください。

問題 2 ある工場で作られているタイヤの平均寿命（航続距離）を調べるために 100 本のタイヤについて検査したところ、航続距離は平均 35000km、標準偏差は 2000km でした。この工場で製造されるタイヤの平均寿命の信頼度 99 % の信頼区間を求めてください。

問題 3 ある選挙で候補者 A の得票率を予測するために投票所で出口調査を行い、400 人中 100 人が A 候補者に投票したと答えました。様々な状況から A 候補者の得票率は 10 % から 50 % の間であることは分かっているものとして、A 候補者の得票率 p の 95 % 信頼区間を求めてください。

ただし、400 人のランダムサンプル中の A 候補への投票数を正規分布で近似する際、本来分散に入っている p を、サンプル比率 $\frac{100}{400}$ で置き換えたもので代用してください。

問題 4 ある合成繊維の原材料が湿度調節のされていない場所に保管されています。保管場所の湿度 X と原材料の水分含有量 Y をある 10 日間について測定したところ次の 2 次元データ (X, Y) が得られました。 X, Y それぞれの平均値 $E[X], E[Y]$ と、共分散 $Cov[X, Y]$ を求めてください。

湿度 (%) : X	45	30	34	52	38	43	40	45	33	60
水分含有量 (%) : Y	10	7	9	12	8	12	10	11	7	14

問題 5 1 回あたりの成功の確率が 0.02 であるとき、100 回独立試行して 4 回成功する確率を求めてください。

問題 6 密度関数が

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるような確率変数 X の期待値と分散を求めてください。

問題 7 2 次元の確率変数 (X, Y) は X, Y が独立であって、 X は正規分布 $N(4, 1)$ に、 Y は正規分布 $N(1, 6)$ に従っています。このとき

$$P[2.9 \leq X - 2Y \leq 4.3]$$

を求めて下さい。

15.2 2022 A/W 定期試験

問題 15.2.1 厚生労働省は、2020 年 6 月 1 日～6 月 7 日にかけて東京都・大阪府・宮城県において無作為抽出された一般住民を対象に、新型コロナウイルス抗体検査を実施しました。大阪府で

は観測数 2970 名に対して抗体保有者が 5 名となりました。大阪府における抗体保有率 p の 95 % 信頼区間を求めて下さい。

ただし母集団（大阪府の一般住民全体）からとった 2970 個の標本中の抗体保有者数 X の分散をサンプル値を使って

$$2970p(1-p) \xrightarrow{\text{代用}} 2970 \cdot \frac{5}{2970} \cdot \frac{2965}{2970} \approx 2.234^2$$

のように 2.234^2 で代用したうえで X を正規分布 $N(2970p, 2.234^2)$ によって近似し、半整数補正も行なって下さい。

問題 15.2.2 健常者の血清カルシウムの平均値は 9.8mg/dl です。無作為に選んだ副甲状腺機能低下症の患者 16 人の血清カルシウム値を測定したところ、平均値は 7.4mg/dl でした。副甲状腺機能低下症患者の血清カルシウム平均値 m は健常者に比べて低いと言えるかどうか有意水準 0.01 で仮説検定して下さい。ただし、副甲状腺機能低下症患者の血清カルシウム値全体は、標準偏差 0.5mg/dl の正規分布に従うと仮定します。

問題 15.2.3 次の 2 次元データ (X, Y) において：

X	0.75	0.55	0.72	0.62	0.66
Y	8.7	6.8	7.9	7.0	7.1

X, Y それぞれの平均値と X, Y の共分散を求めて下さい（近似はしないこと）。

問題 15.2.4 ある地域に住む 25 歳の女性の中から 500 人を抽出して身長を測定したところ、平均値が 157.6、不偏分散が 4.98^2 でした。この地域における 25 歳の女性の身長の平均値の信頼区間を信頼度 95 % で求めて下さい。

問題 15.2.5 プロサッカーリーグに所属する B チーム、L チームの 1 試合あたりの得点数 G_B, G_L はそれぞれパラメータ 1、2 のポアソン分布に従い、互いに独立であると仮定します。

今回 B チームと L チームが対戦します。B チームは 1 試合当たり平均 1 得点ですから、平均 2 得点の L チームに比べて劣勢ですが、『番狂せ』を起こす確率を以下のように計算してみましょう。

- (1) 『1 対 0 で B チームが勝つ』確率、 $P[G_B = 1, G_L = 0]$ を求めて下さい。
- (2) $P[G_B = 2, G_L = 0] + P[G_B = 2, G_L = 1]$ を求めて下さい。
- (3) B チームが 4 点以内の得点で L チームに勝つ確率を求めて下さい。

問題 15.2.6 密度関数が次の $f(x)$ ：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -3 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられる確率変数 U の分散を求めて下さい。

問題 15.2.7 2 次元の確率変数 (X, Y) は X, Y が独立であって、 X は正規分布 $N(50, 16)$ に、 Y は正規分布 $N(15, 1)$ に従っています。このとき

$$P[X - 3Y \leq 2]$$

を求めて下さい。

15.3 2021 A/W 定期試験

問題 15.3.1 ある選挙での候補者 A の得票率を p とします。400 人に出口調査をした結果、80 人が候補者 A に投票したと言っています。ただし、有権者数が非常に大きいのでサンプルの抽出は復元抽出とみなせるものとします。

400 人のランダムサンプルにおける候補者 A に投票した人数を X とすると X は 2 項分布 $B(400, p)$ に従いますが、これを正規分布 $N(400p, 400 \cdot 0.2 \cdot 0.8)$ で近似して（その際、半整数補正はしないでください）候補者 A の得票率 p の信頼度 0.95 の信頼区間を求めて下さい。

問題 15.3.2 ある工場で生産しているスチールパイプの直径の平均値が 20.0mm であると言えるかどうか、大きさ 100 のサンプル調査によって有意水準 5 % で検定する事にしました。そこで実際に 100 個取り出して直径を測定したところ、平均値が 20.2mm、分散が 0.45^2mm でした。

帰無仮説 H_0 : 『母平均は 20.0mm である』が正しいと仮定して棄却域を求め、帰無仮説が棄却されるかどうか調べて下さい。

問題 15.3.3 次の 2 次元データ (X, Y) において：

$$(520, 42), (370, 20), (740, 54), (580, 30), (920, 68), \\ (420, 34), (820, 55), (680, 40), (550, 40), (500, 17)$$

X, Y それぞれの平均値と X, Y の共分散を求めて下さい（近似はしないこと）。

問題 15.3.4 当たりくじが 1000 本中 3 本入っているくじを 100 本買ったとき、当たりくじが 2 本以上含まれている確率をポアソン分布による近似を用いて求めてください。ただし、このくじは極めて多数売られているため、復元抽出したとみなせるとし、 $e^{-0.3} \approx 0.741$ とします。

問題 15.3.5 ある母集団から大きさ 50 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプルの平均値が 54.3、分散が 24.5 でした。母平均の信頼度 99 % の信頼区間を求めて下さい。

問題 15.3.6 密度関数が次の $f(x)$ ：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e-1} e^x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられる確率変数 X の期待値を求めて下さい。

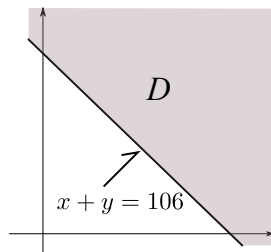
問題 15.3.7 正規分布 $N(13, 2.5)$ に従う母集団からとった大きさ 10 の標本平均 $\bar{X}$ について、確率 $P[12.4 < \bar{X}]$ を求めて下さい。

問題 15.3.8 2 次元の確率変数 (X, Y) は X, Y が独立であって、 X は正規分布 $N(50, 16)$ に、 Y は正規分布 $N(60, 9)$ に従っています。

このとき図の領域 D に対して

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow x + y > 106$$

となることに注意して $P[(X, Y) \in D]$ を求めて下さい。



15.4 2021 S/S 定期試験

問題 15.4.1 ある工場で生産しているスチールパイプから 100 個取り出して直径を測定したところ、平均 20.1mm、標準偏差 0.23mm でした。

全てのスチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm であると工場は言っていますがその主張は正しいと判断して良いでしょうか、

帰無仮説 H_0 : 『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm である』

対立仮説 H_1 : 『スチールパイプの直径の平均値 m は 20.0mm でない』

として有意水準 1 % で仮説検定して下さい。

問題 15.4.2 ある母集団の変数 X は標準偏差 10 の正規分布に従っています。この母集団から大きさ 16 の無作為サンプルを抽出して、そのサンプル平均値が 54.3 でした。母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間を求めて下さい。

問題 15.4.3 見た目がいびつなあるサイコロを 400 回投げたところ、6 の目が 75 回出ました。以下の問いに答えてください。

(1) このいびつなサイコロで 6 の目が出る確率を p とするとき、400 回振った時の 6 の出る回数 X はどんな分布に従いますか。

(2) X の分散をサンプル値を使って

$$400 \cdot \frac{75}{400} \left(1 - \frac{75}{400}\right) = \frac{75 \cdot 325}{400} \approx 7.81^2$$

で代用することにして、 X を正規分布 $N(400p, 7.81^2)$ で近似します（半整数補正はしないことにします）。この方法で 6 の目が出る確率 p の 95 % 信頼区間を求めて下さい。

問題 15.4.4 次の文章が正しいかどうか○／×で答えてください：

(1) 母集団が正規分布に従う場合、標本平均も正規分布に従う。

(2) 大きさ 100 の標本分散の平均値は母集団の平均値の $\frac{99}{100}$ 倍である。

(3) 母集団と同じ分布に従う i.i.d. な確率変数のファミリー（集まり）を、この母集団からとった標本と言う。

問題 15.4.5 平均 10.0、分散 3.1^2 の正規分布に従う母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ について、確率 $P[\bar{X} \leq 10.53]$ を求めてください。

問題 15.4.6 2 次元の確率変数 (A, B) の各成分 A, B は独立であって、共に標準正規分布に従っています。このとき確率： $P[A - B > 2.50]$ を求めてください。ただし、 $\sqrt{2} \approx 1.41$ とします。

問題 15.4.7 次の 2 次元データ (X, Y) について、平均値 $E[X], E[Y]$ 、共分散 $Cov[X, Y]$ を求めてください。

X	1.0	3.0	2.5	2.0	4.0
Y	11.0	17.0	15.0	13.0	19.0

問題 15.4.8 $[-1, 5]$ 上の一様分布の平均値を求めてください。

15.5 2020 A/W 定期試験

問題 15.5.1 あるガソリンスタンドで、トラック用燃料の売上傳票の中から無作為に 50 枚の伝票を取り出したところ、平均売上量は 244 リットルで、標準偏差は 10.6 リットルでした。信頼度 95 % で平均売上量の信頼区間を求めて下さい。

問題 15.5.2 ある教育学者は日本の高校生の平均知能指数は高々 110 であると主張しています。そこで 150 人の高校生を無作為に選んで調査したところ、知能指数の平均値は 111.2 であり、標準偏差は 7.2 でした。この結果からこの教育学者の主張（平均知能指数が 110 以下であること）を認めることは出来るでしょうか？

帰無仮説 H_0 : 『平均知能指数は 110 である』

対立仮説 H_1 : 『平均知能指数は 110 よりも高い』

として有意水準 5 % で仮説検定して下さい。ただし、 $\sqrt{150} \approx 12.25$ として下さい。

問題 15.5.3 あるクラスの 10 名の数学と英語の試験結果は次表の通りでした：

学生番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学	52	58	63	55	88	60	85	60	55	70
英語	68	73	70	65	85	59	92	78	60	75

(1) この 10 人の数学の平均点、英語の平均点を求めて下さい。

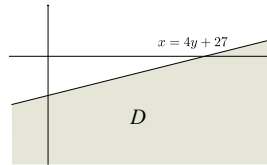
(2) この 10 人の数学の得点と英語の得点の共分散を求めて下さい。

問題 15.5.4 2次元の確率変数 (X, Y) は X, Y が独立であって、 X は正規分布 $N(20, 9)$ に、 Y は正規分布 $N(-1, 1)$ に従っています。

このとき図の領域 D に対して

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow x - 4y > 27$$

となることに注意して $P[(X, Y) \in D]$ を求めて下さい。



問題 15.5.5 次の文章が正しいかどうか、○/×のみで答えて下さい。ただし、文中に出てくる期待値・分散等は存在するものとします。

- (1) 標本平均の期待値は、母集団の期待値といつも等しい。
- (2) 標本不偏分散の期待値は、母集団の分散といつも等しい。
- (3) 標本サイズが大きくなれば、標本平均の分散も大きくなる。

問題 15.5.6 密度関数が次の $h(x)$ であるような確率変数 X に対して、確率 $P[1 \leq X \leq 2]$ と期待値 $E[X]$ を計算して下さい。

$$h(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ただし、極限值： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{kx}} = 0$ ($k > 0, n \geq 0$) は既知とします。

問題 15.5.7 あるミックスナッツの缶詰の表示によると、少なくとも 1 個のカシューナッツがどの缶にも入っていなければなりません。ところが、ある工場で作られたミックスナッツの缶詰のうち 1.2 % にはカシューナッツが入っていませんでした。この工場で作られた 500 個の缶詰のうち、丁度 3 個の缶詰にカシューナッツが入っていない確率を求めて下さい。

15.6 2020 S/S 定期試験

問題 15.6.1 ある工場で直径 1cm の軸棒を標準偏差 0.03cm の管理水準で製造しています。ある日の製造品の中から 10 本のサンプルをとって直径を測定したところ、平均値が 0.978cm でした。品質管理上異常はないと考えても良いでしょうか。

帰無仮説 H_0 : 『この日の製造品の直径の平均値は 1cm である』

対立仮説 H_1 : 『この日の製造品の直径の平均値は 1cm ではない』

として有意水準 5 % で仮説検定して下さい。ただし、この日の製造品の直径の全体は正規分布に従っており、その標準偏差は 0.03cm であると仮定します。また、 $\sqrt{10} \approx 3.16$ とします。

問題 15.6.2 自動車衝突事故の対物保険についてのある研究によると、ある特殊の破損を受けた 120 台の車体を無作為に選んだところ、それらの修理費の平均は 14.4 万円で、標準偏差は 1.7 万円でした。この種の修理の平均費用を信頼度 99 パーセントで区間推定してください。ただし $\sqrt{120} \approx 10.95$ としてください。

問題 15.6.3 ある自動ねじ製作機がねじを切る（＝ねじを作る）場合、平均 2000 本に 1 本の割合で溝のない不良品が生じます。このねじ 1 包み（1000 本）を無作為に選んだとき、その中に不良品が 2 本以上含まれている確率を、ポアソン分布による近似を使って求めてください。ただし、ねじは大量に製造されており、1000 本の抽出は復元抽出と看做せるものとします。

問題 15.6.4 2次元の確率変数 (X, Y) があり、 X, Y は独立であって X は $N(2, 1)$ 、 Y は $N(0, 1)$ に従っています。

(1) $X + \sqrt{3}Y$ はどんな分布に従いますか。 (2) 確率 $P[4 \leq X + \sqrt{3}Y]$ を計算して下さい。

問題 15.6.5 ある中古車センターにおいて、同一車種の中古車の使用年数 X （年）と価格 Y （万円）は下表のようになっていました。

X	1	4	10	2	5	6	8	1
Y	64	35	11	47	27	36	30	59

(1) X, Y の平均値と X の分散、 X と Y の共分散を求めてください。ただし、一切の近似をせず、割り切れない分数は分数のまま答えてください。

(2) Y の X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}[X]}(x - E[X])$$

となることを利用して、使用年数が 3 年のときの価格を概算してください。

問題 15.6.6 密度関数が次の $h(x)$ で与えられる確率変数 W に対して期待値 $E[W]$ と確率 $P[-2.2 \leq W \leq 0.3]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$