

問題 1 次の表には日本の主な河川の長さと流域面積とを示してあります。

	石狩川	北上川	利根川	信濃川	吉野川	筑後川
流域面積（100km ² ） X	143	102	168	121	37	29
長さ（100km） Y	2.6	2.5	3.0	3.7	2.0	1.2

(1) 流域面積を X 、長さを Y とするとき、 $E[X], E[Y], Var[X]$ を求めて下さい。

(2) $Cov[X, Y]$ を求めて下さい。

(3) 長さ Y の、流域面積 X への回帰直線が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となることを使って、流域面積 $X = 150$ のときの長さ Y の推定値を求めてください。

配点：(1)30 点、(2)5 点、(3)5 点

シラバス到達目標：ア、イ

【解答例】 (1)

$$E[X] = \frac{143 + 102 + 168 + 121 + 37 + 29}{6} = \frac{600}{6} = 100$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \frac{43^2 + 2^2 + 68^2 + 21^2 + 63^2 + 71^2}{6} \\ &= \frac{15928}{6} \end{aligned}$$

$$E[Y] = \frac{2.6 + 2.5 + 3.0 + 3.7 + 2.0 + 1.2}{6} = \frac{15}{6} = 2.5$$

(2)

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{143 \cdot 2.6 + 102 \cdot 2.5 + 168 \cdot 3.0 + 121 \cdot 3.7 + 37 \cdot 2.0 + 29 \cdot 1.2}{6} \\ &\quad - 100 \cdot \frac{15}{6} \\ &= \frac{1687.3 - 1500}{6} \\ &= \frac{187.3}{6} \quad (\approx 31.22) \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \frac{43 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0 + 68 \cdot 0.5 + 21 \cdot 1.2 + (-63)(-0.5) + (-71)(-1.3)}{6} \\ &= \frac{4.3 + 0 + 34 + 25.2 + 31.5 + 92.3}{6} \\ &= \frac{187.3}{6} \quad (\approx 31.22) \end{aligned}$$

(3) 従って長さ Y の、流域面積 X への回帰直線は

$$y - \frac{15}{6} = \frac{\frac{187.3}{6}}{\frac{15928}{6}}(x - 100)$$

であり、 $x = 150$ とすると

$$\begin{aligned} y &= \frac{187.3}{15928} \cdot 50 + \frac{15}{6} \\ &= \frac{9365}{15928} + \frac{15}{6} \\ &\approx 0.588 + 2.5 \\ &\approx 3.088 \end{aligned}$$

が得られます。

□

問題 2 密度関数が次の $h(x)$:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 1 \leq x \\ -x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1. \end{cases}$$

であるような確率変数 X に対して、確率 $P[-0.5 \leq X]$ を求めてください。

配点：10 点

シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$\begin{aligned} P[-0.5 \leq X] &= \int_{-0.5}^{+\infty} h(x)dx \\ &= \int_{-0.5}^0 (x + 1)dx + \int_0^1 (-x + 1)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-0.5}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

あるいは、

$$\begin{aligned} P[-0.5 \leq X] &= 1 - P[X < -0.5] \\ &= 1 - \int_{-1}^{-0.5} (x + 1)dx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^{-0.5} \\ &= 1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-0.5}^{-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) + (-1 + 0.5) \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

です。

□

問題 3 確率変数 G が正規分布 $N(2, 3^2)$ に従うとき、以下の問いに答えてください。

(1) $P[2.36 \leq G < 5.69]$ を標準正規分布表を使って求めて下さい。

(2) $P[w \leq G] = 0.0129$ となるような w の値を標準正規分布表を使って求めて下さい。

が得られますから、標準正規分布表により

$$2.23 \approx \frac{w-2}{3}$$

$$8.69 \approx w$$

が分かります。

□

配点：(1)10 点、(2)10 点 シラバス到達目標：ウ、エ

【解答例】 (1)

$$\begin{aligned} P[2.36 \leq G < 5.69] &= P[2.36 \leq N(2, 3^2) < 5.69] \\ &= P[0.36 \leq N(0, 3^2) < 3.69] \\ &= P[0.12 \leq N(0, 1) < 1.23] \\ &= P[0 \leq N(0, 1) < 1.23] - P[0 \leq N(0, 1) < 0.12] \\ &\approx 0.3907 - 0.0478 \\ &= 0.3429 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 0.0129 &= P[w \leq G] \\ &= P[w \leq N(2, 3^2)] \\ &= P\left[\frac{w-2}{3} \leq N(0, 1)\right] \end{aligned}$$

ここで、確率が 0.5 より小さいことから $\frac{w-2}{3} > 0$ であって、

$$\begin{aligned} 0.0129 &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{w-2}{3}\right] \\ 0.4871 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{w-2}{3}\right] \end{aligned}$$

問題 4 令和 6 年度大学入学共通テストの国語の受験者数は 44 万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 116.5、標準偏差（分散の正の平方根）が 35.4 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。得点が 170 点だった受験者の順位はだいたい何位くらいでしょうか。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ
---------	------------

【解答例】 得点データを X とすると、

$$\begin{aligned} P[170 < X] &\approx P[170 < N(116.5, 35.4^2)] \\ &= P[53.5 < N(0, 35.4^2)] \\ &\approx P[1.51 < N(0, 1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.51] \\ &\approx 0.5 - 0.4345 \\ &= 0.0655 \end{aligned}$$

ですから、170 点を超えた人の人数の概算値は

$$0.0655 \times 440000 = 28820$$

であり、170 点の人は大体 28821 位だったということが分かります。

【171 で計算した場合】得点データを X とすると、

$$\begin{aligned} P[171 \leq X] &\approx P[171 < N(116.5, 35.4^2)] \\ &= P[54.5 < N(0, 35.4^2)] \\ &\approx P[1.54 < N(0, 1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.54] \\ &\approx 0.5 - 0.4382 \\ &= 0.0618 \end{aligned}$$

ですから、170 点を超えた人の人数の概算値は

$$0.0618 \times 440000 = 27192$$

であり、170 点の人は大体 27193 位だったということが分かります。

【半整数補正をした場合】

$$P[170 < X] = P[170 \leq X]$$
$$\approx P[171.5 < N(116.5, 35.4^2)]$$
$$= P[54 < N(0, 35.4^2)]$$
$$\approx P[1.525 < N(0, 1)]$$
$$= 0.5 - P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.525]$$
$$\approx 0.5 - \begin{cases} 0.4357 & z = 1.52 \\ 0.4363 & \text{中間値} \\ 0.4370 & z = 1.53 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0.0643 & z = 1.52 \\ 0.0637 & \text{中間値} \\ 0.063 & z = 1.53 \end{cases}$$

ですから、170 点を越えた人の人数の概算値は

$$\begin{cases} 0.0643 \\ 0.0637 \\ 0.063 \end{cases} \times 440000 = \begin{cases} 28292 \\ 28028 \\ 27720 \end{cases}$$

であり、170 点の人は、それぞれの表の読み方に応じて、27721 位、あるいは 28029 位、28293 位だったということが分かります。

□

問題 5 次の関数 $f(x)$ について、たたみ込み $(f * f)(x)$ を計算してください：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：10 点

シラバス到達目標：イ、オ

【解答例】

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)f(y)dy = \int_1^3 f(x - y)\frac{1}{2}dy$$

ここで $f(x - y)$ は $1 \leq x - y \leq 3$ 、すなわち、 $x - 3 \leq y \leq x - 1$ の範囲以外では 0 ですから、積分範囲である $[1, 3]$ と区間 $[x - 3, x - 1]$ の重なり具合を調べなければなりません。

【 $x \leq 2$ の場合】 この場合 2 つの区間は交わりませんので積分値は 0 です。

$$(f * f)(x) = 0$$

【 $2 \leq x \leq 4$ の場合】 この場合 2 つの区間は $[1, x - 1]$ で交わりますから、

$$(f * f)(x) = \int_1^3 f(x - y)\frac{1}{2}dy = \int_1^{x-1} \frac{1}{4}dy = \frac{1}{4}(x - 2)$$

です。

【 $4 \leq x \leq 6$ の場合】 この場合 2 つの区間は $[x - 3, 3]$ で交わるので

$$(f * f)(x) = \int_1^3 f(x - y)\frac{1}{2}dy = \int_{x-3}^3 \frac{1}{4}dy = \frac{1}{4}(6 - x)$$

となります。

【 $6 \leq x$ の場合】 この場合、2 つの区間は交わりませんので、積分値は 0 です。

$$(f * f)(x) = 0$$

以上から

$$(f * f)(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 2) \\ \frac{1}{4}(x - 2) & (2 \leq x \leq 4) \\ \frac{1}{4}(6 - x) & (4 \leq x \leq 6) \\ 0 & (6 \leq x) \end{cases}$$

です。

□

問題 6 xy 平面の長方形 $[2, 4] \times [0, 3]$ を底面とし、その周囲に垂直な壁を立てて、曲面 $z = 3x^2y - 2y$ を屋根とした立体の体積 $V_{[2,4] \times [0,3]}(3x^2y - 2y)$ を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ、オ
---------	--------------

【解答例】

$$\begin{aligned} V_{[2,4] \times [0,3]}(3x^2y - 2y) &= \int_0^3 \left\{ \int_2^4 (3x^2y - 2y) dx \right\} dy \\ &= \int_0^3 [x^3y - 2xy]_2^4 dy \\ &= \int_0^3 \{(64 - 8)y - 2(4 - 2)y\} dy \\ &= 52 \int_0^3 y dy \\ &= 26[y^2]_0^3 \\ &= 234 \end{aligned}$$

□