問題 1 あるサイコロを 500 回投げたところ 2 の目が 95 回出ました。このサイコロは 2 の目が出やすいと言えるでしょうか。有意水準 5 %で仮説検定してください。その際、半整数補正はしないでください（事実１）。

ただし、このサイコロの 2 の出る確率 p は、少なくとも $\frac{1}{10} < p < \frac{1}{2}$ を満たしていることは分かっているものとします（従って事実１を使っても良い）。

配点：5 点	シラバス到達目標：ケ

【解答例】

帰無仮説 H_0： このサイコロの 2 の目の出る確率は $\frac{1}{6}$ である。
対立仮説 H_1： このサイコロの 2 の目の出る確率は $\frac{1}{6}$ より大きい。

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。するとこのサイコロを 500 回投げたときの 2 の出た回数 X は２項分布 $B\left(500, \frac{1}{6}\right)$ に従います。

まず

$$P\left[X \geq 500 \cdot \frac{1}{6} + d\right] = 0.05$$

となるような正数 d を求めます。

事実 1 により、X は $N\left(500 \cdot \frac{1}{6}, 500 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)$ で近似されますから

$$0.05 = P\left[N\left(500 \cdot \frac{1}{6}, 500 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) \geq 500 \cdot \frac{1}{6} + d\right]$$
$$= P\left[N\left(0, \frac{50^2}{6^2}\right) \geq +d\right]$$
$$= P\left[N(0,1) \geq \frac{6d}{50}\right]$$
$$0.45 = P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{6d}{50}\right]$$

となり、正規分布表から

$$\frac{6d}{50} \approx 1.645$$

従って $d \approx 13.7$ が分かります。

従って有意水準 0.05 の右片側棄却域は $[97.03, +\infty)$ となります。

今回のサンプル値 95 はこの片側棄却域に入っていませんので、帰無仮説 H_0 を棄却するに足る合理的な理由なく、このサイコロは 2 の目が出やすいとは言えないと判断されます。 □

問題 2 ある工場でこの日生産された『新型ネジ』全体の中から 100 個を任意抽出して強度試験をしたところ、平均強度は 157kg/mm^2 でした。

この日生産された『新型ネジ』の強度の標準偏差は 3kg/mm^2 であるとして、この日生産された『新型ネジ』の強度の平均値の信頼度 95 %の信頼区間を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：カ、ク

【解答例】 この日生産された新型ネジの強度の平均値を m とします。

この日生産された新型ネジの強度の全体を母集団 X とし、ここからとった大きさ 100 の標本平均を $\overline{X}$ とすると、中心極限定理から $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3^2}{100}\right)$ で近似されます。

まず

$$P[|\overline{X} - m| \leq d] = 0.95$$

となるような正数 d を求めます。

$$\begin{aligned} 0.95 &= P[|\overline{X} - m| \leq d] \\ &\approx P\left[\left|N\left(m, \frac{3^2}{100}\right) - m\right| \leq d\right] \\ &\approx P\left[|N(0,1)| \leq \frac{10d}{3}\right] \end{aligned}$$

$$0.475 \approx P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{10d}{3}\right]$$

なので、正規分布表から

$$\frac{10d}{3} \approx 1.96$$

従って $d \approx 0.588$ が得られます。

つまり、

$$P[|\overline{X} - m| \leq 0.588] \approx 0.95$$

となっていますので、今回のサンプル値 157 について、信頼度 95 %で

$$\begin{aligned} |157 - m| &\leq 0.588 \\ 157 - 0.588 \leq m &\leq 157 + 0.588 \\ 156.412 \leq m &\leq 157.588 \end{aligned}$$

が成り立ちます。

以上から求める信頼区間は

$$[156.412, 157.588]$$

です。 □

問題 3 ある工場で生産している製品 Q の重さは、通常は平均値が 90g、標準偏差が 5g の正規分布をしている筈ですが、その平均値に疑義が生じています（分布が正規分布である事や標準偏差の値には疑義は生じていないとします）。正しく生産されているか調べるために、ある日に生産されたの製品 Q の中から 100 個のサンプルを抽出して有意水準 0.05 で仮説検定をする事になりました。

実際にサンプルをとって重さを測定したところ、平均値が 91.7g でした。この日の製品 Q は平常通りの重さであると言えるでしょうか？

配点：10 点	シラバス到達目標：カ、ケ

【解答例】

帰無仮説 H_0： この日に生産された製品 Q の重さの平均値は 90g である。
対立仮説 H_1： この日に生産された製品 Q の重さの平均値は 90g ではない。

帰無仮説 H_0 が正しいと仮定します。すると、この日生産された製品 Q の重さ全体 X は正規分布 $N(90, 5^2)$ に従い、この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(90, \frac{5^2}{100}\right)$ に従います。

$$P[|\bar{X} - 90| \geq d] = 0.05$$

となるような正数 d を求めます。

$$\begin{aligned}
0.05 &= P[|\bar{X} - 90| \geq d] \\
&= P\left[\left|N\left(90, \frac{5^2}{100}\right) - 90\right| \geq d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \geq 2d\right] \\
0.475 &= P[0 \leq N(0,1) \leq 2d]
\end{aligned}$$

なので、正規分布表から

$$2d \approx 1.96$$

従って $d \approx 0.98$ が得られます。

従って有意水準 0.05 での両側棄却域は

$$(-\infty, 89.02] \cup [90.98, +\infty)$$

であり、

今回のサンプル値 91.7 はこの棄却域に入っていますので、帰無仮説 H_0 は棄却され、この日に生産された製品 Q の重さの平均値は 90g ではないと判断されます。 □

問題 4 L 社のシャツは縫製不良の割合が 2 %であることが分かっています。無作為に L 社のシャツを 100 枚選んだときに（復元抽出と見做して良い）、その中に縫製不良品が 4 枚以上入っている確率を、ポアソン分布による近似によって求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：エ

【解答例】　無作為に選んだ 100 枚中の縫製不良品の数 X は二項分布 $B(100, 0.02)$ に従います。これは事実 2 の適用条件を満たしていますので、パラメータ 2 のポアソン分布で近似されます。

$$
\begin{aligned}
P[X \leq 3] &= \sum_{k=0}^{3} P[X = k] \\
&\approx \sum_{k=0}^{3} P[P_O(2) = k] \\
&\approx \sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!} \mathrm{e}^{-2} \\
&\approx \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right) \mathrm{e}^{-2} \\
&\approx \frac{19}{3} \cdot 0.135 \\
&\approx 0.85455
\end{aligned}
$$

ですから、

$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] \approx 0.14545$$

です。 □

問題 5 次の２次元データ (A, B) について、以下の問いに答えてください。

データ A	8	6	5	7	7	7	11	7	4	8
データ B	3	6	4	3	5	6	5	9	2	5

(1) データ A、B の期待値と分散、$E[A], Var[A], E[B], Var[B]$ を求めてください。

(2) 共分散 $Cov[A, B]$ を求めて下さい。

ただし、四捨五入等の近似は一切せず、すべて有限小数の形で解答して下さい。

配点：(1)26 点、(2)4 点	シラバス到達目標：ア、イ、オ

【解答例】　(1)

$$
\begin{aligned}
E[A] &= \frac{8+6+5+7+7+7+11+7+4+8}{10} = 7 \\
Var[A] &= E[(A - E[A])^2] = \frac{1^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2}{10} = \frac{32}{10} = 3.2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[B] &= \frac{3+6+4+3+5+6+5+9+2+5}{10} = \frac{48}{10} = 4.8 \\
Var[B] &= E[B^2] - E[B]^2 \\
&= \frac{9+36+16+9+25+36+25+81+4+25}{10} - \left(\frac{48}{10}\right)^2 \\
&= \frac{266}{10} - \frac{24^2}{5^2} \\
&= \frac{266 \cdot 5 - 24^2 \cdot 2}{50} \\
&= \frac{1330 - 1152}{50} \\
&= \frac{178}{50} \\
&= 3.56
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
Cov[A,B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\
&= \frac{24+36+20+21+35+42+55+63+8+40}{10} - 7\cdot\frac{48}{10} \\
&= \frac{344 - 7\cdot 48}{10} \\
&= \frac{8}{10} \\
&= 0.8
\end{aligned}
$$

□

問題 6 確率変数 X の密度関数が次の $h(x)$：

$$
h(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x + \frac{1}{3} & -4 \le x \le 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

であるとき、期待値 $E[X]$ と確率 $P[-1 \le X < 3]$ を求めてください。

配点：15 点	シラバス到達目標：ア、ウ

【解答例】

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx &= \int_{-4}^{0}\left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x\right)dx + \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{6}x^2\right]_{-4}^{0} + \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{18}x^3\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{1}{36}(0+64) + \frac{1}{6}(0-16) + \frac{1}{6}\cdot 4 - \frac{1}{18}\cdot 8 \\
&= -\frac{2}{3} \\
&= E[X]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P[-1 \le X < 3] &= \int_{-1}^{3} h(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}\right)dx + \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}x\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{12}x^2\right]_{0}^{2} \\
&= -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

□

問題 7 X, Y は独立な確率変数で、X は $N(58.2, 9)$ に、Y は $N(-24.1, 4)$ に従います。また不等式 $2y + 98 \leq x$ の表す領域を D とします。
　このとき $P[(X, Y) \in D]$ を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ、エ、オ

【解答例】

$$P[(X, Y) \in D] = P[2Y + 98 \leq X] = P[98 \leq X - 2Y]$$

　ここで $-2Y$ は $N(48.2, 16)$ に従い、X と独立ですから $X - 2Y$ は $N(106.4, 25)$ に従います。

　従って

$$\begin{aligned} P[(X, Y) \in D] &= P[98 \leq X - 2Y] \\ &= P[98 \leq N(106.4, 25)] \\ &= P[-8.4 \leq N(0, 25)] \\ &= P[-1.68 \leq N(0, 1)] \\ &= 0.5 + P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.68] \\ &\approx 0.5 + 0.4535 \\ &\approx 0.9535 \end{aligned}$$

です。 □

問題 8 次の文章が正しいかどうか、○×で答えてください。
　(1) 母集団がどんな分布をしていても、標本平均の平均値は母集団の平均値に等しい。
　(2) 母集団が正規分布に従っていれば、標本分散の平均値は母集団の分散に等しい。

配点：(1)3 点、(2)2 点	シラバス到達目標：キ

【解答例】 (1) ○
　(2) × □